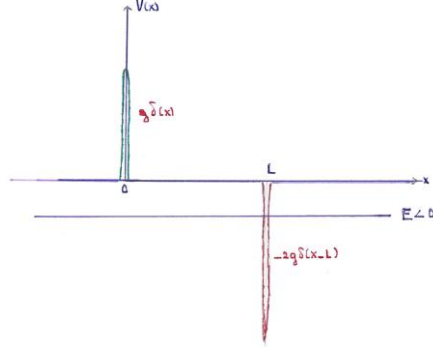


**Θ1**[1.5:.25+.25+1] Θεωρούμε δυναμικό  $V(x) = g\delta(x) - 2g\delta(x-L)$ . **(α)** Ζωγραφίστε το. **(β)** Για ποιες τιμές της ενέργειας έχουμε δέσμιες καταστάσεις. **(γ)** Να βρεθούν οι εξισώσεις από τις οποίες θα υπολογίσετε **(γ1)** την ενέργεια και **(γ2)** τις ιδιοσυναρτήσεις και να εξηγήσετε την μεθοδολογία εύρεσής τους.

**(α)**



**(β)** Το κριτήριο για τις δέσμιες είναι  $V_{min} < E < \min(V(-\infty), V(+\infty))$ .

$$V_{min} = -\infty \text{ (όρος, } -2g\delta(x-L))$$

$$V(-\infty) = V(+\infty) = 0$$

$$\Rightarrow \min(V(-\infty), V(+\infty)) = 0.$$

Άρα έχω δέσμιες καταστάσεις για  $-\infty < E < 0$ .

**(γ)** Στην περιοχή  $x < 0$ , έχουμε  $\psi(x) = Ae^{\gamma x}$ .

Στην περιοχή  $0 < x < L$ , έχουμε  $\psi(x) = B_+e^{\gamma x} + B_-e^{-\gamma x}$ ,

Στην περιοχή  $x > L$ , έχουμε

$$\psi(x) = Ce^{-\gamma x}, \text{ με } \gamma^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$$

Οι συνοριακές συνθήκες στα  $x = 0$  και  $x = L$ , δίνουν τέσσερις εξισώσεις που σε μορφή πίνακα είναι,

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 \\ \left(\frac{2mg}{\hbar^2} - \gamma\right) & -\gamma & \gamma & 0 \\ 0 & e^{\gamma L} & e^{-\gamma L} & -e^{-\gamma L} \\ 0 & -\gamma e^{\gamma L} & \gamma e^{-\gamma L} & \left(\frac{4mg}{\hbar^2} - \gamma\right) e^{\gamma L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B_+ \\ B_- \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \text{ (γ1) Οι ιδιοτιμές της ενέργειας υπολογίζονται, από την αλγεβρική}$$

εξίσωση που προκύπτει μηδενίζοντας την ορίζουσα του πίνακα  $4 \times 4$ .

**(γ2)** Τις ιδιοσυναρτήσεις τις βρίσκουμε, λύνοντας τις τρεις εξισώσεις που απομένουν αφού θέσαμε την ορίζουσα μηδέν, με την επιπλέον εξίσωση της κανονικοποίησης,  $\int_{-\infty}^0 A^2 e^{2\gamma x} dx + \int_0^L (B_+ e^{\gamma x} + B_- e^{-\gamma x})^2 dx + \int_L^{\infty} C^2 e^{-2\gamma x} dx = 1$ , μια και οι άγνωστοι είναι τέσσερις.

**Θ2**[1.5:.75+.25+.5] Θεωρούμε ορθογώνιο φράγμα δυναμικού, πάχους  $L=10\text{\AA}$  και ύψους  $V_0 = 1\text{eV}$ . Για  $E = V_0$ , να βρεθούν **(α)** η γενική έκφραση που υπολογίσει τον συντελεστή ανάκλασης, χρησιμοποιώντας την σωστή κυματοσυνάρτηση για την περιοχή  $[0, L]$ , και **(β)** η τιμή του  $R$ . **(γ)** Για  $E > V_0$  να βρεθεί η ενέργεια (σε eV) του 1<sup>ου</sup> συντονισμού.

**(α)** Στην περιοχή  $x < 0$ , έχουμε  $\psi(x) = e^{ikx} + Ae^{-ikx}$ . Στην περιοχή  $x > L$ , έχουμε  $\psi(x) = Ce^{ikx}$ . Στην περιοχή  $0 < x < L$ , καθώς για  $E = V_0$  έχουμε  $\psi''(x) = 0$ ,  $\psi(x) = B'x + B$ , με  $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ . Οι συνοριακές συνθήκες στα  $x = 0$  και  $x = L$ , δίνουν τέσσερις εξισώσεις,  $1 + A = B$  (1),  $ik(1 - A) = B'$  (2),  $B'L + B = Ce^{ikL}$  (3) και  $B' = ikCe^{ikL}$  (4). Διαιρώντας την (3) με την (4) βρίσκουμε  $\frac{B}{B'} = \frac{1-ikL}{ik}$ . Τώρα διαιρώντας (1) με (2) έχουμε  $\frac{B}{B'} = \frac{1+A}{ik(1-A)} = \frac{1-ikL}{ik} \Rightarrow A = \frac{ikL}{ikL-2}$ , οπότε το  $R = |A|^2 = \frac{(kL)^2}{(kL)^2+4}$ .

$$\text{Αφού } k^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}, R = \frac{mV_0L^2}{mV_0L^2+2\hbar^2}.$$

$$\text{(β) Καθώς } L=10\text{\AA}=10^{-9}\text{m και } V_0 = 1\text{eV} = 1.6 \times 10^{-19}\text{J}, R = \frac{mV_0L^2}{mV_0L^2+2\hbar^2} = \frac{10^{-30} \cdot 1.6 \times 10^{-19} (10^{-9})^2}{10^{-30} \cdot 1.6 \times 10^{-19} (10^{-9})^2 + 2(10^{-34})^2} = \frac{1.6 \times 10^{-67}}{1.6 \times 10^{-67} + 2 \times 10^{-68}} = \frac{16}{18} = \frac{8}{9}$$

**(γ)** Συντονισμοί συμβαίνουν για  $E = V_0 + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$ , οπότε ο 1<sup>ος</sup> συντονισμός αντιστοιχεί σε  $n=1$ .

Έχουμε λοιπόν, διαιρώντας με το  $1.6 \times 10^{-19}$  για να έχω μονάδες eV,

$$E = V_0 + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = 1\text{eV} + \frac{(10^{-34})^2 \times \pi^2}{2 \times 10^{-30} \times (10^{-9})^2} \frac{1}{1.6 \times 10^{-19}} \text{eV} = 1\text{eV} + \frac{\pi^2}{2 \times 1.6} \frac{10^{-68}}{10^{-30} \times 10^{-18} \times 10^{-19}} \text{eV} = 1\text{eV} + \frac{\pi^2}{2 \times 1.6} \frac{10^{-68}}{10^{-67}} \text{eV} \sim 1.3\text{eV}$$

**Θ3** [2:.5x4] Κ.Α.Τ. στην κατάσταση,  $|\psi(x, t=0)\rangle = |c_0\rangle|0\rangle + |c_1\rangle|1\rangle$ . Να βρεθούν **(α)** το  $x_{10}$  με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος και **(β)** το  $p_{10}$  με την αλγεβρική μέθοδο. Δίνεται ότι,  $\langle E \rangle = \frac{3}{4}$ , να βρεθεί **(γ)** η κυματοσυνάρτηση την τυχαία χρονική στιγμή,  $t$ , και **(δ)** η μέση χρονοεξαρτώμενη θέση.

$$\text{(α) } x_{10} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_1 x \psi_0 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{(1/4)} x e^{-\frac{x^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{4}{\pi}\right)^{(1/4)} x e^{-\frac{x^2}{2}} x \left(\frac{1}{\pi}\right)^{(1/4)} e^{-\frac{x^2}{2}} = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^{(1/4)} x^2 e^{-x^2} = \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^{(1/4)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{(β) } p_{10} = \langle 1 | \left(\frac{a-a^\dagger}{i\sqrt{2}}\right) | 0 \rangle = \frac{-\langle 1 | 1 \rangle}{i\sqrt{2}} = \frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\langle \mathbf{y} \rangle \langle E \rangle = |c_0|^2 \frac{1}{2} + |c_1|^2 \frac{3}{2} = \frac{3}{4} \text{ και } |c_0|^2 + |c_1|^2 = 1, \text{ που δίνει } |c_0| = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ και } |c_1| = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Άρα } |\psi(x, t)\rangle = (\sqrt{3}|0\rangle e^{-it/2} + |1\rangle e^{-i3t/2})/2.$$

$$\langle \delta \rangle \text{ Αφού } x_{00} = x_{11} = 0, \varphi_{01} = \delta_{10}^x = 0, \omega = 1, \text{ έχουμε } \langle x \rangle(t) = |c_0|^2 x_{00} + |c_1|^2 x_{11} + 2|c_0||c_1||x_{10}| \cos(\omega t + \varphi_{12} + \delta_{21}^x) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cos(t)$$

$$\langle \mathbf{04} \rangle [75] \text{ Θεωρούμε δυναμικό } V(x, y) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2). \text{ Αν } |\psi(x, y, t = 0)\rangle = (|0\rangle_x |1\rangle_y + |1\rangle_x |0\rangle_y) / \sqrt{2}. \text{ Να βρεθεί το } \langle \vec{r} \rangle(t).$$

$$\text{Είναι ουσιαστικά στάσιμη κατάσταση, μια και η ενέργεια είναι ίδια για τις καταστάσεις } |0\rangle_x |1\rangle_y \text{ και } |1\rangle_x |0\rangle_y \text{ δηλαδή } \frac{1}{2} + \frac{3}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = 2$$

$$\langle \vec{r} \rangle(t) = \langle x \rangle \vec{i} + \langle y \rangle \vec{j}. \quad \text{Οπότε} \quad \langle x \rangle = \left( \frac{\langle 0|x|1\rangle_y + \langle 1|x|0\rangle_y}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{a_x + a_x^\dagger}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{|0\rangle_x \langle 1|_y + |1\rangle_x \langle 0|_y}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\langle 0|_x a_x |1\rangle_x \langle 1|_y |0\rangle_y + \langle 1|_x a_x^\dagger |0\rangle_x \langle 0|_y |1\rangle_y) = \frac{1}{2\sqrt{2}} (\langle 0|_x |0\rangle_x \langle 1|_y |0\rangle_y + \langle 1|_x |1\rangle_x \langle 0|_y |1\rangle_y) = 0, \text{ και ανάλογα } \langle y \rangle = 0. \text{ Δηλαδή } \langle \vec{r} \rangle(t) = \vec{0}.$$

$$\langle \mathbf{05} \rangle [1:5+.5] \text{ Θεωρούμε δυναμικό } V(x, y) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + 2m \omega^2 y^2. \text{ Να βρείτε την ενέργεια και να γράψετε τις ιδιοσυναρτήσεις της } 1^{\text{ης}} \text{ εκφυλισμένης κατάστασης.}$$

$$V(x, y) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m (2\omega)^2 y^2, \text{ δηλαδή έχουμε δύο αρμονικούς ταλαντωτές, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το}$$

$$\Phi.Σ.Μ. \text{ με } E_0 = \hbar \omega, E_{0x} = E_0, E_{0y} = 2E_0, x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}} \text{ και } y_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}.$$

$$\text{Έχουμε } E = E_x + E_y = \left( n_x + \frac{1}{2} \right) + 2 \left( n_y + \frac{1}{2} \right) = n_x + 2n_y + \frac{3}{2}.$$

| $n_x$ | $n_y$ | <b>E-1.5</b> |                                                        |
|-------|-------|--------------|--------------------------------------------------------|
| 0     | 0     | 0            | Θεμελιώδης κατάσταση                                   |
| 1     | 0     | 1            | 1 <sup>η</sup> διεγερμένη                              |
| 0     | 1     | 2            | 2 <sup>η</sup> διεγερμένη & 1 <sup>η</sup> εκφυλισμένη |
| 2     | 0     | 2            | 2 <sup>η</sup> διεγερμένη & 1 <sup>η</sup> εκφυλισμένη |

Οπότε η 1<sup>η</sup> εκφυλισμένη έχει ενέργεια 3.5ħω.

$$\psi_{0,1}(x, y) = \psi_0(x) \psi_1(y) = \left( \frac{1}{\pi} \right)^{(1/4)} e^{-\left( \frac{x}{x_0} \right)^2 / 2} \left( \frac{4}{\pi} \right)^{(1/4)} \frac{y}{y_0} e^{-\left( \frac{y}{y_0} \right)^2 / 2}$$

$$\psi_{2,0}(x, y) = \psi_2(x) \psi_0(y) = \left( \frac{1}{4\pi} \right)^{(1/4)} \left( 2 \left( \frac{x}{x_0} \right)^2 - 1 \right) e^{-\left( \frac{x}{x_0} \right)^2 / 2} \left( \frac{1}{\pi} \right)^{(1/4)} e^{-\left( \frac{y}{y_0} \right)^2 / 2}$$

$$\langle \mathbf{06} \rangle [1] \text{ Ηλεκτρόνιο κινείται στην επιφάνεια σφαίρας σε κατάσταση, } |N| [ |i \cdot |20\rangle - |11\rangle ]. \text{ Να υπολογιστεί η αβεβαιότητα της } x\text{-συνιστώσας της στροφορμής. Από τον κανονισμό } |N|^2 (-i\langle 20| + \langle 11|)(i|20\rangle + |11\rangle) = 2|N|^2 = 1 \Rightarrow |N| = 1/\sqrt{2}.$$

$$\langle l_x \rangle = \left( \frac{-i\langle 20| + \langle 11|}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{l_- + l_+}{2} \right) \left( \frac{i|20\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{4} (-i\langle 20| + \langle 11|)(i l_- |20\rangle + l_- |11\rangle + i l_+ |20\rangle + l_+ |11\rangle) = \frac{1}{4} (-i\langle 20| + \langle 11|)(i\sqrt{6}|2\rangle - 1) + \sqrt{2}|10\rangle + i\sqrt{6}|21\rangle) = 0, \text{ μια και όλα τα εσωτερικά γινόμενα των σφαιρικών αρμονικών είναι μηδέν (διαφορετικοί δείκτες } m).$$

$$\langle l_x^2 \rangle = \left( \frac{-i\langle 20| + \langle 11|}{\sqrt{2}} \right) \left( \frac{l_- + l_+}{2} \right) \left( \frac{l_- + l_+}{2} \right) \left( \frac{i|20\rangle + |11\rangle}{\sqrt{2}} \right) = \frac{1}{8} (-i\langle 20| + \langle 11|)(l_- + l_+)(i\sqrt{6}|2\rangle - 1) + \sqrt{2}|10\rangle + i\sqrt{6}|21\rangle) = \frac{1}{8} (-i\langle 20| + \langle 11|)(i\sqrt{6} l_- |2\rangle - 1) + \sqrt{2} l_- |10\rangle + i\sqrt{6} l_- |21\rangle + i\sqrt{6} l_+ |2\rangle - 1) + \sqrt{2} l_+ |10\rangle + i\sqrt{6} l_+ |21\rangle) = \frac{1}{8} (-i\langle 20| + \langle 11|)(2|2\rangle - 2) + \sqrt{2} \sqrt{2}|1\rangle - 1) + i\sqrt{6} \sqrt{6}|20\rangle + i\sqrt{6} \sqrt{6}|20\rangle + \sqrt{2} \sqrt{2}|11\rangle + i\sqrt{6} 2|22\rangle) = \frac{1}{8} (12\langle 20|20\rangle + 2\langle 11|11\rangle) = \frac{14}{8} = \frac{7}{4}.$$

$$\text{Άρα } (\Delta l_x)^2 = \langle l_x^2 \rangle - \langle l_x \rangle^2 \Rightarrow \Delta l_x = \frac{\sqrt{7}}{2}.$$

$$\langle \mathbf{07} \rangle [1.25:5+.25+.5] \text{ Η κυματοσυνάρτηση του ατόμου υδρογόνου, είναι } \Psi(\vec{r}, t = 0) = |N| [\psi_{200}(\vec{r}) + i \cdot \psi_{211}(\vec{r})]. \text{ Να υπολογίστε } \langle \mathbf{a} \rangle \text{ την } \Psi(\vec{r}, t), \langle \mathbf{b} \rangle \text{ την μέση ενέργεια, και } \langle \mathbf{y} \rangle \text{ την } \langle l_x^2 + l_y^2 \rangle(t) \text{ την τυχαία χρονική στιγμή } t.$$

$$\text{Προφανώς } |N| = 1/\sqrt{2}. \text{ Οπότε } \langle \mathbf{a} \rangle \Psi(\vec{r}, t) = \frac{[\psi_{200}(\vec{r}) e^{it/8} + i \cdot \psi_{211}(\vec{r}) e^{it/8}]}{\sqrt{2}} = \frac{[\psi_{200}(\vec{r}) + i \cdot \psi_{211}(\vec{r})] e^{it/8}}{\sqrt{2}} \sim \frac{[\psi_{200}(\vec{r}) + i \cdot \psi_{211}(\vec{r})]}{\sqrt{2}}, \text{ δηλαδή}$$

$$\text{στάσιμη κατάσταση. } \langle \mathbf{b} \rangle \text{ Αφού έχουμε μόνο μία ενεργειακή κατάσταση } (n=2), \text{ δηλαδή } \langle E \rangle = -\frac{1}{2n^2} = -\frac{1}{8} \text{ και σε } eV, \text{ έχουμε}$$

$$\langle E \rangle = -\frac{1}{8} \times 27.2 \text{ eV} = 3.4 \text{ eV}. \langle \mathbf{y} \rangle \text{ Αφού } \langle l_x^2 + l_y^2 \rangle = \langle l^2 \rangle - \langle l_z^2 \rangle \text{ και } \langle l^2 \rangle = P_{200} 0(0+1) + P_{211} 1(1+1) = \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{2} 2 = 1 \text{ και}$$

$$\langle l_z^2 \rangle = P_{200} 0^2 + P_{211} 1^2 = \frac{1}{2} 0 + \frac{1}{2} 1 = \frac{1}{2}, \text{ άρα } \langle l_x^2 + l_y^2 \rangle = \frac{1}{2}.$$

**Θ8 Κυκλώστε** τις σωστές προτάσεις. Βαθμολογία: Σωστές απαντήσεις +0.5, **αν κυκλώστε λάθος πρόταση -0.5.**

1. Το δυναμικό  $V(x) = -|V_0|\theta(L+x) - 3|V_0|\theta(L-x)$ , έχει δέσμιες καταστάσεις, για ενέργειες  $-4|V_0| < E < -3|V_0|$ . **ΣΩΣΤΟ.**
2. Θεωρούμε συμμετρικό τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού στο οποίο υπάρχουν τρεις ενεργειακές καταστάσεις, τετραπλασιάζουμε το πάχος του μένουν δύο ενεργειακές καταστάσεις. **ΛΑΘΟΣ**, όταν μεγαλώνει το πάχος μεγαλώνει και το  $\lambda$  ανάλογα, οπότε η τιμή του  $\frac{\pi}{2\lambda}$ , που καθορίζει τα σημεία τομής στην περιοχή  $[0,1]$ , μικραίνει, άρα περιμένουμε περισσότερες ενεργειακές καταστάσεις.
3. Στον Κ.Α.Τ. ισχύει  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_2 \hat{p} \psi_1 = -2i$ . **ΛΑΘΟΣ**,  $\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_2 \hat{p} \psi_1 = p_{21} = i$ , με την αλγεβρική μέθοδο.
4. Στον Κ.Α.Τ. για την θεμελιώδη κατάσταση στο Σ.Ι., ισχύει  $\psi_0 = \left(\frac{m\omega}{\hbar\pi}\right)^{(1/4)} e^{-\frac{m\omega x^2}{2\hbar}}$ . **ΣΩΣΤΟ**
5. Οι θεμελιώσεις καταστάσεις στις νανοδομές είναι εκφυλισμένες. **ΛΑΘΟΣ**, Πάντα η θεμελιώδης χωρίς εκφυλισμό.
6. Στην θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου η μέση δυναμική ενέργεια του στο Φ.Σ.Μ. είναι -1.5. **ΛΑΘΟΣ**, είναι -1.