ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι (1η ΠΡΟΟΔΟΣ) 22 Νοέμβρη 2019 (Διδάσκων: Αντρέας Φ. Τερζής)

ΘΕΜΑ 1[0.5x3] **(1α)** Να βρεθεί ο μεταθέτης δύο οποιονδήποτε συνιστωσών της στροφορμής.

(1β) Να βρεθεί η μικρότερη δυνατή τιμή του γινομένου των αβεβαιοτήτων $(\Delta l_x)(\Delta l_y)$.

(1γ) Αν $\hat{W} = \hat{x}\hat{p}\hat{x}$, να δείξετε ότι αν $\langle \hat{x} \rangle = 0$ η πιο μικρή τιμή της $(\Delta \hat{W})$ είναι $\hbar(\Delta \hat{x})/2$.

(1α) Διδάχτηκε στις παραδόσεις ενώ υπάρχει σε παλαιότερα θέματα και στο βιβλίο Τραχανά, $[\ell_x, \ell_y] = i\hbar\ell_z$

(1β) Από (1α) και $(\Delta \ell_x)(\Delta \ell_y) \geq \frac{1}{2}|\langle[\ell_x, \ell_y]\rangle| = \frac{\hbar}{2}|\langle \ell_z \rangle|$

(1γ) Από $(\Delta\hat{W})(\Delta\hat{x}) \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{W}, x]\rangle|$ και αφού $[\hat{W}, \hat{x}] = [xpx, x] = x[px, x] + \overset{0}{[x, x]}px = xp\overset{0}{[x, x]} + x[p, x]x = -i\hbar x^2$. Μπορούμε να δοκιμάσουμε και άλλη μέθοδο, $[xpx, x]\psi = xpx^2\psi - x^2px\psi = -i\hbar x\frac{dx^2\psi}{dx} + i\hbar x^2\frac{dx\psi}{dx} = \ldots = -i\hbar x^2\psi$. Άρα $(\Delta W)(\Delta x) \geq \frac{\hbar}{2}|\langle x^2 \rangle| = \frac{\hbar}{2}\langle x^2 \rangle$ Τώρα αφού $\langle x \rangle = 0$, $(\Delta x)^2 = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle$, Έτσι έχουμε $(\Delta W)(\Delta x) \geq \frac{\hbar}{2}(\Delta x)^2 \rightarrow (\Delta W) \geq \frac{\hbar(\Delta x)}{2}$

όποτε $(\Delta W)_{min} = \frac{\hbar}{2}(\Delta x)$.

ΘΕΜΑ 2[1.5+0.5+0.75x2] Ηλεκτρόνιο μάζας m βρίσκεται περιορισμένο σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού μήκους L. Αν η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου είναι $\psi(x, t=0) = |c_1|e^{i\varphi_{12}}\psi_1 + |c_2|\psi_2$ και γνωρίζουμε ότι $\langle E \rangle = 5\hbar^2\pi^2/4mL^2$ και $\langle x \rangle(t=0) = L/2$ να βρεθούν **(2α)** η $\psi(x,t)$, **(2β)** η πιθανότητα να μετρήσω την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης **(2γ)** το $\langle x \rangle(t)$ και **(2δ)** να αποδείξετε ότι ισχύει το 1ο θεώρημα του Ehrenfest.

Είναι η άσκηση 3 (Θέμα 3) στο διαγώνισμα Σεπτεμβρίου 2019.
Ερώτημα (2δ) από το αποτέλεσμα (2γ) και βρίσκοντας ότι $\langle p \rangle(t) = \frac{8\hbar}{3L}\cos\omega t$, επιβεβαιώνεται ότι $d\langle x \rangle(t)/dt = \langle p \rangle(t)/m$ (1ο θεώρημα Ehrenfest).

ΘΕΜΑ 3[1.5+1+0.75+1+0.75] Θεωρούμε ένα ερμιτιανό τελεστή $W = |w| \cdot (|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|)$, σε κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή H, η οποία σε μορφή πίνακα χρησιμοποιώντας τις ιδιοσυναρτήσεις $|1\rangle$ και $|2\rangle$ είναι $H = \varepsilon\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$. **(3α)** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας. Την χρονική στιγμή t=0, μετράμε το φυσικό μέγεθος που σχετίζονται με τον τελεστή W και βρίσκουμε θετική τιμή. Να βρεθούν **(3β)** η $\psi(x,t)$ και **(3γ)** η $\langle W \rangle(t)$. Για τον τελεστή $K = k \cdot (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| - i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1|)$, να βρεθούν **(3δ)** οι πιθανότητες να μετρήσω κάθε μία από τις ιδιοτιμές του και να υπολογίσετε **(3ε)** το $d\langle K \rangle(t)/dt$.

Ίδια με Θέμα 3 στην περσινή (ακ. έτος 2018-2019) 1η πρόοδο. Με την διαφορά ότι δ (στα περσινά θέματα) $= \varepsilon$.
Οπότε ιδιοτιμές $\lambda_\pm = \varepsilon \pm \varepsilon$, δηλαδή ανέρχεται ο (ιδιοσυνάρτηση $\frac{|1\rangle - i|2\rangle}{2} = |-\rangle$) και 2ε (ιδιοσυνάρτηση $\frac{|1\rangle + i|2\rangle}{\sqrt{2}} = |+\rangle$.
Οπότε όλα τα αποτελέσματα ίδια στα ερωτήματα που δεν εμφανίζεται το δ και εκεί που εμφανίζεται ίδια, αρκεί να βάλω $\delta = \varepsilon$.