

Θ1[1:0.5+0.5] Θεωρούμε κυματοσυνάρτηση $\Psi = \left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/4} \cdot x \cdot e^{-\lambda \cdot x^2/2} \cdot e^{i \cdot (B+3) \cdot p_0 \cdot x/\hbar}$. Να βρεθούν (α) η μέση ορμή και (β) η αβεβαιότητα θέσης. Για την ευκολία στην γραφή της λύσης θέτουμε $k = (B + 3)p_0/\hbar$.

$$\begin{aligned} \langle p \rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \Psi^* \left(-i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left(\frac{4\lambda^3}{\pi} \right)^{1/4} x e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} e^{-i \cdot k \cdot x} (-i\hbar) \left(\frac{4\lambda^3}{\pi} \right)^{1/4} (1 + ikx - \lambda x^2) e^{-\frac{\lambda x^2}{2}} e^{i \cdot k \cdot x} = \\ &= \left(\frac{4\lambda^3}{\pi} \right)^{1/2} (-i\hbar) \int_{-\infty}^{\infty} (x + ikx^2 - \lambda x^3) e^{-\lambda x^2} dx = \left(\frac{4\lambda^3}{\pi} \right)^{1/2} (k \hbar) \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx = (k \hbar) \left(\frac{4\lambda^3}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1}{(2\lambda)^{1/2}} \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^{1/2} = \hbar k = (B + 3)p_0. \end{aligned}$$

Όπου μηδενίσαμε χωρίς πράξεις τα ολοκληρώματα με περιττούς εκθέτες του x δηλαδή τα ολοκληρώματα με x και x^3 .

(β) $\langle x \rangle = 0$, λόγω της συμμετρίας της πυκνότητας πιθανότητας $\Psi^* \Psi = \left(\frac{4\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2} x^2 e^{-\lambda x^2}$, δηλαδή ίσες πιθανότητες για θετικές και αρνητικές θέσεις.

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \Psi^* \Psi dx = \left(\frac{4\lambda^3}{\pi} \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\lambda x^2} dx = \left(\frac{4\lambda^3}{\pi} \right)^{1/2} \frac{1 \cdot 3}{(2\lambda)^2} \left(\frac{\pi}{\lambda} \right)^{1/2} = \frac{3}{2\lambda} \Rightarrow \Delta x = (\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{2\lambda}}$$

Θ2 [1.25+.5] Α.Π.Δ. στην $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Theta(x) \Theta(L-x)$ κατάσταση ενέργειας. Να βρεθούν (α) η μέση θέση και (β) το $\langle p^2 \rangle$.

(α) Η πυκνότητας πιθανότητας, $\Psi^* \Psi = \frac{2}{L} \sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, είναι συμμετρική ως προς την μέση του πηγαδιού, άρα έχουμε τις τιμές της θέσης πριν και μετά το μέσο του, ισοπίθανες, οπότε $\langle x \rangle = L/2$

(β) Δεν χρειάζεται ο υπολογισμός $\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) dx$, καθώς στο ΑΠΔ έχουμε μόνο κινητική ενέργεια, οπότε ισχύει,

$$\frac{\langle p^2 \rangle}{2m} = \langle T \rangle = \langle H \rangle = E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2 \Rightarrow \langle p^2 \rangle = \frac{\hbar^2 \pi^2}{L^2} n^2. \text{ Όπου θέσαμε την μέση ενέργεια ίση με την } E_n \text{ μια και έχουμε μία ιδιοκατάσταση του ΑΠΔ την } \psi_n.$$

Θ3[1:0.25+0.75] Έστω $\widehat{W} \Psi = \frac{\Psi + \Psi^*}{2}$. (α) Να αποδείξετε ότι δεν είναι ερμητιανός και (β) να βρεθούν οι ιδιοσυναρτήσεις του.

$$\begin{aligned} \langle \alpha \rangle (\widehat{W} \Psi, \Phi) &= \left(\frac{\Psi + \Psi^*}{2}, \Phi \right) = \frac{1}{2} (\Psi, \Phi) + \frac{1}{2} (\Psi^*, \Phi), (\Psi, \widehat{W} \Phi) = \left(\Psi, \frac{\Phi + \Phi^*}{2} \right) = \frac{1}{2} (\Psi, \Phi) + \frac{1}{2} (\Psi, \Phi^*) \Rightarrow (\widehat{W} \Psi, \Phi) \neq (\Psi, \widehat{W} \Phi) \\ \text{άρα δεν είναι ερμητιανός τελεστής.} \end{aligned}$$

$$\langle \beta \rangle \text{ Ισχύει } \widehat{W} \Psi = \frac{\Psi + \Psi^*}{2} = \text{Re}(\Psi) \text{ και } \widehat{W}^2 \Psi = \widehat{W}(\widehat{W} \Psi) = \widehat{W}(\text{Re}(\Psi)) = \text{Re}(\widehat{W} \Psi) = \text{Re}(\text{Re}(\Psi)) = \text{Re}(\Psi) \Rightarrow \widehat{W}^2 \Psi = \widehat{W} \Psi.$$

$$\text{Από το πρόβλημα ιδιοτιμών } \widehat{W} \Psi = \lambda \Psi \text{ και } \widehat{W}^2 \Psi = \widehat{W}(\widehat{W} \Psi) = \widehat{W}(\lambda \Psi) = \lambda(\widehat{W} \Psi) = \lambda \lambda \Psi = \lambda^2 \Psi \Rightarrow \lambda^2 \Psi = \lambda \Psi.$$

Η τελευταία σχέση ισχύει για οποιαδήποτε Ψ , άρα $\lambda^2 = \lambda \Rightarrow \lambda(\lambda - 1) = 0$, δηλαδή το $\lambda = 0$ ή $\lambda = 1$, οι ιδιοτιμές του $\widehat{W}$.

Έστω $\Psi = R + iI$, τότε για την ιδιοτιμή $\lambda = 0$, έχουμε $\widehat{W} \Psi = \lambda \Psi = 0 \Psi = 0$, αλλά και $\widehat{W} \Psi = \text{Re}(\Psi) = \text{Re}(R + iI) = R$, οπότε $R = 0$, δηλαδή η ιδιοτιμή $\lambda = 0$, έχει ιδιοσυνάρτηση την $\Psi = iI$ (καθαρά φανταστική κυματοσυνάρτηση).

Ενώ, για την ιδιοτιμή $\lambda = 1$, έχουμε $\widehat{W} \Psi = \lambda \Psi = 1 \Psi = \Psi$, αλλά και $\widehat{W} \Psi = \text{Re}(\Psi) = \text{Re}(R + iI) = R = R + iI$, οπότε

$I = 0$, δηλαδή η ιδιοτιμή $\lambda = 1$, έχει ιδιοσυνάρτηση την $\Psi = R$ (καθαρά πραγματική κυματοσυνάρτηση)

Θ4[.5+.75] (α) Να αποδείξετε, χρησιμοποιώντας τον συζυγή τελεστή, ότι ο τελεστής $\widehat{W} = p_y \cdot x \cdot p_y + (A + 1)xy$ είναι ερμητιανός. (β) Να βρεθεί το ελάχιστο γινόμενο των αβεβαιότητων του $\widehat{W}$ με τον τελεστή p_x . Για την 'ευκολία' μου βάζω $A=0!$

(α) $W^+ = (p_y x p_y + xy)^+ = (p_y (x p_y))^+ + (xy)^+ = (x p_y)^+ p_y^+ + y^+ x^+ = p_y^+ x^+ p_y^+ + y^+ x^+ = p_y x p_y + xy = W$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από την ερμητιανότητα των θέσεων και ορμών ($x^+ = x, y^+ = y$ και $p_y^+ = p_y$).

$$\begin{aligned} \langle \beta \rangle [W, p_x] &= [(p_y x p_y + xy), p_x] = [p_y (x p_y), p_x] + [xy, p_x] = p_y [x p_y, p_x] + [p_y, p_x] (x p_y) + x [y, p_x] + [x, p_x] y = \\ &= p_y x [p_y, p_x] + p_y [x, p_x] p_y + 0 \cdot (x p_y) + x \cdot 0 + i\hbar y = p_y x \cdot 0 + p_y i\hbar p_y + i\hbar y = i\hbar (y + p_y^2). \end{aligned}$$

Οπότε, $(\Delta W \cdot \Delta p_x)_{\min} = \frac{1}{2} |\langle [W, p_x] \rangle| = \frac{\hbar}{2} |(A + 1)\langle y \rangle + \langle p_y^2 \rangle|$. «Αδιαφορώντας» για τις ασυνεπείς μονάδες του W !

Θ7[1.5:0.5x3] **Α.Π.Δ.** σε υπέρθεση των ψ_1 και ψ_2 , με $\langle x \rangle(0) = \frac{L}{2}$ και $\langle p \rangle(0) = \frac{32\hbar}{15L}$. Να βρεθούν (α) η $\Psi(x, t)$, (β) η μέση ενέργεια και (γ) η $\langle x \rangle(t)$. Δίνεται $x_{21} = -\frac{16L}{9\pi^2}$ και $p_{21} = -\frac{8\hbar}{3L}$.

Έχουμε, $\langle x \rangle(t) = |c_1|^2 x_{11} + |c_2|^2 x_{22} + 2|c_1||c_2||x_{21}| \cos(\omega t + \varphi_{12} + \delta_{21}^x) = \frac{L}{2} + 2|c_1||c_2|\left(\frac{16L}{9\pi^2}\right) \cos(\omega t + \varphi_{12} + \pi)$, αφού

$$x_{11} = x_{22} = L/2 \text{ (η μέση θέση στις συμμετρικές γύρω από την μέση του πηγαδιού, ιδιοκαταστάσεις } \psi_1 \text{ και } \psi_2), \text{ και από } -\frac{16L}{9\pi^2} = \frac{16L}{9\pi^2}(-1) = \frac{16L}{9\pi^2}e^{i\pi} = x_{21} = |x_{21}|e^{i\delta_{21}^x} \Rightarrow |x_{21}| = \frac{16L}{9\pi^2}, \delta_{21}^x = \pi.$$

$$\text{Οπότε } \langle x \rangle(t=0) = \frac{L}{2} + 2|c_1||c_2|\left(\frac{16L}{9\pi^2}\right) \cos(\varphi_{12} + \pi) = \frac{L}{2} - 2|c_1||c_2|\left(\frac{16L}{9\pi^2}\right) \cos(\varphi_{12}) = \frac{L}{2} \Rightarrow \cos(\varphi_{12}) = 0 \Rightarrow \varphi_{12} = \frac{\pi}{2}.$$

Επίσης, έχουμε, $\langle p \rangle(t) = |c_1|^2 p_{11} + |c_2|^2 p_{22} + 2|c_1||c_2||p_{21}| \cos(\omega t + \varphi_{12} + \delta_{21}^p) = 2|c_1||c_2|\left(\frac{8\hbar}{3L}\right) \cos\left(\omega t + \varphi_{12} - \frac{\pi}{2}\right)$, αφού $p_{11} = p_{22} = 0$ (η μέση ορμή των πραγματικών ιδιοκαταστάσεων ψ_1 και ψ_2), και από

$$-\frac{8\hbar}{3L} = \frac{8\hbar}{3L}(-i) = \frac{8\hbar}{3L}e^{i(-\frac{\pi}{2})} = p_{21} = |p_{21}|e^{i\delta_{21}^p} \Rightarrow |p_{21}| = \frac{8\hbar}{3L}, \delta_{21}^p = -\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Οπότε } \langle p \rangle(t=0) = 2|c_1||c_2|\left(\frac{8\hbar}{3L}\right) \cos\left(\varphi_{12} - \frac{\pi}{2}\right) = 2|c_1||c_2|\left(\frac{8\hbar}{3L}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{32\hbar}{15L} \Rightarrow 2|c_1||c_2| = \frac{4}{5} \Rightarrow |c_1||c_2| = \frac{2}{5}.$$

Λαμβάνοντας υπόψη και την κανονικοποίηση, $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$, εύκολα προκύπτει ότι υπάρχουν δύο συνδυασμοί, δηλαδή,

$$|c_1| = \frac{1}{\sqrt{5}}, |c_2| = \frac{2}{\sqrt{5}} \text{ ή } |c_1| = \frac{2}{\sqrt{5}}, |c_2| = \frac{1}{\sqrt{5}}. \text{ Διαλέγουμε τον 1º συνδυασμό, οπότε}$$

$$\text{(α)} \Psi(x, t) = |c_1|e^{i\varphi_{12}}e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}\psi_1(x) + |c_2|e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}\psi_2(x) = \frac{e^{\frac{i\pi}{2}}e^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}\psi_1(x) + 2e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}\psi_2(x)}{\sqrt{5}} = \frac{ie^{-\frac{iE_1 t}{\hbar}}\psi_1(x) + 2e^{-\frac{iE_2 t}{\hbar}}\psi_2(x)}{\sqrt{5}}.$$

$$\text{(β)} \langle E \rangle(t) = \sum_{n=1}^2 |c_n|^2 E_n = |c_1|^2 E_1 + |c_2|^2 E_2 = \frac{1}{5}E_1 + \frac{4}{5}E_2 = \frac{1}{5}E_1 + \frac{4}{5}4E_1 = \frac{17}{5}\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} = \frac{17\hbar^2 \pi^2}{10mL^2}.$$

$$\text{(γ)} \langle x \rangle(t) = \frac{L}{2} + \frac{4}{5}\left(\frac{16L}{9\pi^2}\right) \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = \frac{L}{2} + \left(\frac{64L}{45\pi^2}\right) \sin(\omega t), \text{ με } \omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{3\hbar \pi^2}{2mL^2}.$$

Θ6[2.75:0.25+0.5+0.5+0.5+0.25+0.75] Έστω η Χαμιλτονιανή είναι, $\hat{H} = (A+1)\varepsilon(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|)$. Να βρεθούν (α1) οι ιδιοτιμές και (α2) οι ιδιοσυναρτήσεις της $\hat{H}$. Οι $|1\rangle$ και $|2\rangle$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του ερμητιανός τελεστής $\hat{W}$, με ιδιοτιμές τις w_1, w_2 . Την χρονική στιγμή $t=0$, μετρώ το φυσικό μέγεθος που σχετίζεται με τον $\hat{W}$ και βρίσκω τιμή w_2 . Να βρεθεί η $|\Psi(x, t)\rangle$ ως συνάρτηση, (β1) των $|\pm\rangle = \frac{|1\rangle \pm |2\rangle}{\sqrt{2}}$ και (β2) των $|1\rangle, |2\rangle$. Να βρεθούν (γ) η μέση τιμή του τελεστή $\langle \hat{W} \rangle(t)$ και (δ) ο ρυθμός μεταβολής του $\langle \hat{W} \rangle(t)$, χρησιμοποιώντας τον τύπο με τον μεταθέτη.

(α) Ο πίνακας της Χαμιλτονιανής είναι $(A+1)\varepsilon \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ και από την διαγωνιοποίησή του βρίσκουμε τις ιδιοτιμές, και τις ιδιοσυναρτήσεις του, που είναι η $2(A+1)\varepsilon$ με ιδιοσυνάρτηση $|+\rangle = \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}$ και η ιδιοτιμή 0 με ιδιοσυνάρτηση $|-\rangle = \frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}$.

(β) Αφού μετρώ w_2 έχουμε $|\Psi(x, t=0)\rangle = |2\rangle = \frac{|+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}}$, οπότε $c_+ = \langle +|\Psi(x, 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$ και $c_- = \langle -|\Psi(x, 0)\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Έτσι } |\Psi(x, t)\rangle = c_+ e^{-i2(A+1)\varepsilon t/\hbar} |+\rangle + c_- e^{-i0t/\hbar} |-\rangle = \frac{e^{-i2(A+1)\varepsilon t/\hbar} |+\rangle - |-\rangle}{\sqrt{2}} \sim \frac{e^{-i(A+1)\varepsilon t/\hbar} |+\rangle - e^{-i(A+1)\varepsilon t/\hbar} |-\rangle}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{Θέτω } \tilde{\varepsilon} \equiv (A+1)\varepsilon/\hbar, \text{ οπότε } |\Psi(x, t)\rangle = \frac{e^{-i\tilde{\varepsilon}t} |+\rangle - e^{-i\tilde{\varepsilon}t} |-\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{e^{-i\tilde{\varepsilon}t} \left(\frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}} \right) - e^{-i\tilde{\varepsilon}t} \left(\frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{2}} = |1\rangle \left(\frac{e^{-i\tilde{\varepsilon}t} - e^{-i\tilde{\varepsilon}t}}{2} \right) + |2\rangle \left(\frac{e^{-i\tilde{\varepsilon}t} + e^{-i\tilde{\varepsilon}t}}{2} \right),$$

που δίνει $|\Psi(x, t)\rangle = -i\sin(\tilde{\varepsilon}t)|1\rangle + \cos(\tilde{\varepsilon}t)|2\rangle$.

(γ) Από την τελευταία $|\Psi(x, t)\rangle$, $\langle \hat{W} \rangle(t) = \sum |d_n(t)|^2 w_n = |-i\sin(\tilde{\varepsilon}t)|^2 w_1 + |\cos(\tilde{\varepsilon}t)|^2 w_2 = \sin^2(\tilde{\varepsilon}t)w_1 + \cos^2(\tilde{\varepsilon}t)w_2$.

(δ) Χρειάζομαι τον $\frac{[W, H]}{(A+1)\varepsilon} = (w_1|1\rangle\langle 1| + w_2|2\rangle\langle 2|)(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1|) - (|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + i|1\rangle\langle 2| - i|2\rangle\langle 1|)(w_1|1\rangle\langle 1| + w_2|2\rangle\langle 2|) = (w_1|1\rangle\langle 1| + iw_1|1\rangle\langle 2| + w_2|2\rangle\langle 2| - iw_2|2\rangle\langle 1|) - (w_1|1\rangle\langle 1| + w_2|2\rangle\langle 2| - iw_1|2\rangle\langle 1| + iw_2|1\rangle\langle 2|) = i(w_1 + w_2)|1\rangle\langle 2| - i(w_1 + w_2)|2\rangle\langle 1| = i(w_1 + w_2)(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|)$. Οπότε και $i\hbar \frac{d\langle W \rangle(t)}{dt} = \langle [W, H] \rangle = (i\sin(\tilde{\varepsilon}t)\langle 1| + \cos(\tilde{\varepsilon}t)\langle 2|)(i(w_1 + w_2)(A+1)\varepsilon(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|))(-i\sin(\tilde{\varepsilon}t)|1\rangle + \cos(\tilde{\varepsilon}t)|2\rangle) = (w_1 + w_2)(A+1)\varepsilon(i\sin(\tilde{\varepsilon}t)\langle 1|1\rangle\langle 2|2\rangle \cos(\tilde{\varepsilon}t) + \cos(\tilde{\varepsilon}t)\langle 22\rangle\langle 11\rangle \sin(\tilde{\varepsilon}t)) = 2(w_1 + w_2)(A+1)\varepsilon i\sin(\tilde{\varepsilon}t) \cos(\tilde{\varepsilon}t) \Rightarrow \frac{d\langle W \rangle(t)}{dt} = (w_1 + w_2)(A+1)\varepsilon \sin\left(\frac{2(A+1)\varepsilon t}{\hbar}\right).$

Θ5[1.25] Έστω η Χαμιλτονιανή έχει ιδιοτιμές $(B + 1)\varepsilon$ και $-(B + 1)\varepsilon$ με ιδιοσυναρτήσεις τις ψ_+ , ψ_- . Θεωρούμε ερμητιανό τελεστή $\widehat{W}$, για τον οποίο ισχύει, $\widehat{W}\psi_+ = |w|\psi_+ - i|w|\psi_-$ και $\widehat{W}\psi_- = |w|\psi_- + i|w|\psi_+$. Αν την χρονική στιγμή $t=0$, μετρώ το φυσικό μέγεθος που σχετίζεται με τον $\widehat{W}$ και βρίσκω ότι $\Psi(x, t = 0) = (\psi_+ - \psi_-)/\sqrt{2}$ να υπολογιστεί η πιθανότητα να μετρήσω την μεγαλύτερη ιδιοτιμή του $\widehat{W}$.

Ο πίνακας του τελεστή W είναι $|w| \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$ και από την διαγωνοποίησή του βρίσκουμε τις ιδιοτιμές, και τις ιδιοσυναρτήσεις του, που είναι η $2|w|$ με ιδιοσυνάρτηση $\psi_{2|w|} = \frac{\psi_+ - i\psi_-}{\sqrt{2}}$ και η μηδενική ιδιοτιμή με ιδιοσυνάρτηση $\psi_0 = \frac{\psi_+ + i\psi_-}{\sqrt{2}}$.

$$\text{Αφού } \Psi(x, t = 0) = (\psi_+ - \psi_-)/\sqrt{2} \Rightarrow \Psi(x, t) = \frac{e^{-i(B+1)\varepsilon t/\hbar}\psi_+ - e^{i(B+1)\varepsilon t/\hbar}\psi_-}{\sqrt{2}}.$$

Θέτω $\tilde{\varepsilon} \equiv (B + 1)\varepsilon / \hbar$, οπότε ($1^{\text{η}}$ μεθοδολογία)

$$\begin{aligned} \text{η πιθανότητα είναι } P_{2|w|} &= \left| \left(\psi_{2|w|}, \Psi(x, t) \right) \right|^2 = \left| \left(\frac{\psi_+ - i\psi_-}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-i\tilde{\varepsilon}t}\psi_+ - e^{i\tilde{\varepsilon}t}\psi_-}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 = \left| \frac{e^{-i\tilde{\varepsilon}t}}{2}(\psi_+, \psi_+) - \left(\frac{e^{i\tilde{\varepsilon}t}}{2}i(\psi_-, \psi_-) \right) \right|^2 = \\ &= \left| \frac{e^{-i\tilde{\varepsilon}t}}{2} - \left(\frac{e^{i\tilde{\varepsilon}t}}{2}i \right) \right|^2 = \frac{1}{4} |(\cos(\tilde{\varepsilon}t) - i\sin(\tilde{\varepsilon}t)) - i(\cos(\tilde{\varepsilon}t) + i\sin(\tilde{\varepsilon}t))|^2 = \frac{1}{4} |(\cos(\tilde{\varepsilon}t) + \sin(\tilde{\varepsilon}t)) - i(\cos(\tilde{\varepsilon}t) + \sin(\tilde{\varepsilon}t))|^2 = \\ &= \frac{1}{2} |(\cos(\tilde{\varepsilon}t) + \sin(\tilde{\varepsilon}t))|^2 = \frac{1 + \sin(2\tilde{\varepsilon}t)}{2}. \end{aligned}$$

Η μπορούμε να εφαρμόσουμε μία $2^{\text{η}}$ μεθοδολογία, γράφοντας την $\Psi(x, t)$, ως υπέρθεση των $\psi_{2|w|}$ και ψ_0 .

$$\begin{aligned} \Psi(x, t) &= \frac{e^{-i\tilde{\varepsilon}t}\psi_+ - e^{i\tilde{\varepsilon}t}\psi_-}{\sqrt{2}} = \frac{(\cos(\tilde{\varepsilon}t) - i\sin(\tilde{\varepsilon}t)) \left(\frac{\psi_{2|w|} + \psi_0}{\sqrt{2}} \right) - (\cos(\tilde{\varepsilon}t) + i\sin(\tilde{\varepsilon}t)) \left(\frac{\psi_0 - \psi_{2|w|}}{\sqrt{2}i} \right)}{\sqrt{2}} = \\ &= \frac{(\cos(\tilde{\varepsilon}t) - i\sin(\tilde{\varepsilon}t)) \left(\frac{\psi_{2|w|} + \psi_0}{\sqrt{2}} \right) + (i\cos(\tilde{\varepsilon}t) - \sin(\tilde{\varepsilon}t)) \left(\frac{\psi_0 - \psi_{2|w|}}{\sqrt{2}} \right)}{\sqrt{2}} = \frac{(\cos(\tilde{\varepsilon}t) + \sin(\tilde{\varepsilon}t))(1-i)}{2} \psi_{2|w|} + \frac{(\cos(\tilde{\varepsilon}t) - \sin(\tilde{\varepsilon}t))(1+i)}{2} \psi_0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Οπότε η πιθανότητα είναι } P_{2|w|} &= \left| \left(\psi_{2|w|}, \Psi(x, t) \right) \right|^2 = \left| \left(\psi_{2|w|}, \frac{(\cos(\tilde{\varepsilon}t) + \sin(\tilde{\varepsilon}t))(1-i)}{2} \psi_{2|w|} \right) \right|^2 = \left| \frac{(\cos(\tilde{\varepsilon}t) + \sin(\tilde{\varepsilon}t))(1-i)}{2} \right|^2 = \\ &= \frac{1}{4} (\sqrt{1^2 + 1^2})^2 (\cos(\tilde{\varepsilon}t) + \sin(\tilde{\varepsilon}t))^2 = \frac{1 + \sin(2\tilde{\varepsilon}t)}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Η πιθανότητα είναι } P_{2|w|} &= \left| \left(\psi_{2|w|}, \Psi(x, t) \right) \right|^2 = \left| \left(\frac{\psi_+ - i\psi_-}{\sqrt{2}}, \frac{e^{-i\tilde{\varepsilon}t}\psi_+ - e^{i\tilde{\varepsilon}t}\psi_-}{\sqrt{2}} \right) \right|^2 = \left| \frac{e^{-i\tilde{\varepsilon}t}}{2}(\psi_+, \psi_+) - \left(\frac{e^{i\tilde{\varepsilon}t}}{2}i(\psi_-, \psi_-) \right) \right|^2 = \\ &= \left| \frac{e^{-i\tilde{\varepsilon}t}}{2} - \left(\frac{e^{i\tilde{\varepsilon}t}}{2}i \right) \right|^2 = \frac{1}{4} |(\cos(\tilde{\varepsilon}t) - i\sin(\tilde{\varepsilon}t)) - i(\cos(\tilde{\varepsilon}t) + i\sin(\tilde{\varepsilon}t))|^2 = \frac{1}{4} |(\cos(\tilde{\varepsilon}t) + \sin(\tilde{\varepsilon}t)) - i(\cos(\tilde{\varepsilon}t) + \sin(\tilde{\varepsilon}t))|^2 = \\ &= \frac{1}{2} |(\cos(\tilde{\varepsilon}t) + \sin(\tilde{\varepsilon}t))|^2 = \frac{1 + \sin(2\tilde{\varepsilon}t)}{2}. \end{aligned}$$

Θ8 [1.25] ΟΛΕΣ ΟΙ ΠΡΟΤΑΣΕΙΣ ΕΙΝΑΙ ΣΩΣΤΕΣ!

1. Ο συζυγής του τελεστή $\frac{d}{dx} - x$ είναι ο τελεστής $-x - \frac{d}{dx}$.
2. Ο συζυγής του τελεστή $-\frac{d}{dx} + x$ είναι ο τελεστής $x + \frac{d}{dx}$.
3. Αν η κυματοσυνάρτηση είναι $|N| \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left(i - 2\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right)$ αυτή βρίσκεται στην περιοχή $[0, L]$.
4. Αν η κυματοσυνάρτηση είναι $|N| \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left(i - 2\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \right)$ αυτή βρίσκεται στην περιοχή $[-L/2, L/2]$.
5. Οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της αρτιότητας με ιδιοτιμή -1 , είναι η περιττές συναρτήσεις.
6. Οι άρτιες συναρτήσεις είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της αρτιότητας με ιδιοτιμή $+1$.
7. Σε Α.Π.Δ. μήκους L , αρχικά στην θεμελιώδη κατάσταση, που διπλασιάζω το μήκος του, η πιθανότητα «εμφάνισης» της θεμελιώδους κατάστασης στο νέο Α.Π.Δ. είναι $\frac{2}{L^2} \left| \int_0^{2L} \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cdot dx \right|^2$.
8. Σε Α.Π.Δ. μήκους L , αρχικά στην θεμελιώδη κατάσταση, που διπλασιάζω το μήκος του, η πιθανότητα «εμφάνισης» της θεμελιώδους κατάστασης στο νέο Α.Π.Δ. είναι $\frac{4}{L^2} \left| \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cdot dx \right|^2$.
9. Το κυματοπακέτο $\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} c(p) \cdot e^{ipx/\hbar} \cdot e^{-i\frac{p^2}{2m\hbar}t} dp$, με $c(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar} \cdot \Psi(x, t = 0) dx$ περιγράφει ελεύθερο σωματίο.
10. Ίδια με την 9.