

Τελική εξέταση «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακαδημαϊκού έτους 2025-2026 (21/1/2026), διδ. Ανδρέας Φ. Τερζής

Θ1[0.8:0.4+0.4] Έστω $\hat{W}\Psi = -\Psi^*$. **(α)** Να αποδείξετε ότι ο $\hat{W}$ δεν είναι ερμιτιανός και **(β)** να βρεθεί μια οποιοδήποτε μη πραγματική ιδιοτιμή του.

Θ2[0.8] Να βρεθεί το ελάχιστο γινόμενο των αβεβαιολήτων των τελεστών, $\hat{W} = x \cdot p_y \cdot x$ και $\hat{R} = y^2 - x \cdot p_y$.

Θ3[2:0.25+0.25+0.5+0.25+0.25+0.25+0.25]. Έστω ερμιτιανός τελεστής $\hat{W} = |w\rangle(2 \cdot |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|)$. Γνωρίζουμε για την Χαμιλτονιανή ότι, $\hat{H}|1\rangle = \varepsilon(|1\rangle - |2\rangle)$, $\hat{H}|2\rangle = \varepsilon(|2\rangle - |1\rangle)$. Να βρεθούν **(α1)** οι ιδιοτιμές και **(α2)** οι ιδιοσυναρτήσεις του $\hat{H}$. Αν την χρονική στιγμή $t=0$, μετρώ το φυσικό μέγεθος που σχετίζεται με τον $\hat{W}$ και βρίσκω τιμή $|w|$. Να βρεθεί η $\Psi(x, t)$ ως συνάρτηση, **(β1)** των $|\pm\rangle = \frac{|1\rangle \pm |2\rangle}{\sqrt{2}}$ και **(β2)** των $|1\rangle, |2\rangle$. Να βρεθούν **(γ)** η πιθανότητα να βρω σε μία μέτρηση $2|w|$, **(δ)** η μέση τιμή του τελεστή $\langle \hat{W} \rangle(t)$ και **(ε)** ο τελεστής, που από την μέση τιμή του υπολογίζεται ο ρυθμός μεταβολής του $\langle \hat{W} \rangle(t)$, υπό μορφή πίνακα με βάση τις καταστάσεις $|1\rangle, |2\rangle$.

Θ4[1.5:0.25+0.5+0.75] Θεωρούμε δυναμικό $V(x) = 2g\delta(x) - g\delta(x - L)$. **(α)** Ζωγραφίστε το. **(β)** Να εξηγήσετε για ποιες τιμές της ενέργειας έχουμε δέσμιες καταστάσεις. **(γ)** Να βρεθούν οι εξισώσεις από τις οποίες θα υπολογίσετε την ενέργεια και τις ιδιοσυναρτήσεις και να εξηγήσετε την μεθοδολογία εύρεσής τους.

Θ5[1.5:0.25x2+0.5+0.25x2] Για κβαντικό αρμονικό ταλαντωτή έχουμε, $|\psi(x, t=0)\rangle = |c_1|e^{i\varphi_{12}}|1\rangle + |c_2||2\rangle$. Να βρεθούν **(α)** το $x_{21} = \langle \psi_2, \hat{x}\psi_1 \rangle$ με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος και **(β)** το p_{21} με την αλγεβρική μέθοδο. Αν γνωρίζουμε ότι για $t=0$, η μέση θέση και η μέση ορμή είναι 0 και -1 , την τυχαία χρονική στιγμή t να βρεθούν **(γ)** η κυματοσυνάρτηση, **(δ)** η μέση ορμή και **(ε)** η μέση αρτιότητα.

Θ6[0.8:0.3+0.5] Για ηλεκτρόνιο σε δυναμικό $V(x, y) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2 + 2m\omega^2y^2$, να βρεθούν **(α)** η ενέργεια της 1ης διεγερμένης κατάστασης και **(β)** οι κυματοσυναρτήσεις της 1ης εκφυλισμένης κατάστασης.

Θ7[0.8] Σωματίο μάζας M κινείται στην επιφάνεια σφαίρας ακτίνας a . Αν η κατάσταση του περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(\theta, \varphi) = |N|(1 + \cos\theta)$, να βρεθεί η μέση τιμή της κινητικής ενέργειάς του.

Θ8[0.8:0.3+0.5] Η κυματοσυνάρτηση του ατόμου υδρογόνου, είναι

$$\Psi(\vec{r}, t=0) = |N|[\psi_{200}(\vec{r}) + \psi_{210}(\vec{r}) + i \cdot \psi_{211}(\vec{r})].$$

Να υπολογίστε **(α)** την $\Psi(\vec{r}, t)$ και **(β)** και την $\langle l_x^2 + l_y^2 \rangle(t)$ την τυχαία χρονική στιγμή

Θ9 Κυκλώστε τις σωστές προτάσεις. Βαθμολογία: Σωστές απαντήσεις +0.2, αν κυκλώσετε λάθος πρόταση -0.2.

1. Ο συζυγής του τελεστή $\frac{d}{dx} - x$ είναι ο τελεστής $-x - \frac{d}{dx}$.
2. Ο τελεστής $x \cdot p_x \cdot y$ είναι ερμιτιανός
3. Σε Α.Π.Δ. αρχικά στην θεμελιώδη κατάσταση, που διπλασιάζω το μήκος του, η πιθανότητα «εμφάνισης» της θεμελιώδους κατάστασης στο νέο Α.Π.Δ. είναι $\frac{2}{L^2} \left| \int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cdot dx \right|^2$.
4. Η κυματοσυνάρτηση $|N| \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) \left(1 + 2\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)$ μπορεί να περιγράψει μια υπέρθεση ιδιοκαταστάσεων σε ΑΠΔ σε περιοχή $[0, L]$.
5. Οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της αρτιότητας με ιδιοτιμή +1, είναι οι περιττές συναρτήσεις.
6. Το δυναμικό $V(x) = -|V_0|\theta(L+x) - 3|V_0|\theta(L-x)$, έχει δέσμιες καταστάσεις, για ενέργειες $-4|V_0| < E < -3|V_0|$.
7. Θεωρούμε συμμετρικό τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού στο οποίο υπάρχουν τρεις ενεργειακές καταστάσεις, τετραπλασιάζουμε το πάχος του μένει μία ενεργειακή κατάσταση.
8. Θεωρούμε ορθογώνιο φράγμα δυναμικού, εύρους L και ύψους V_0 . Για $E = V_0$, η κυματοσυνάρτηση στην περιοχή $[0, L]$, είναι της μορφής $Ax^2 + Bx + C$.
9. Σε ορθογώνιο φράγμα δυναμικού, εύρους L και ύψους V_0 , ο 1ος συντονισμός γίνεται για $E = V_0 - \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2}$.
10. Η κυματοσυνάρτηση $|N|x^2 e^{-x^2/2}$, είναι υπέρθεση των καταστάσεων $|0\rangle$ και $|2\rangle$ του ΚΑΤ.
11. Στον Κ.Α.Τ. ισχύει $\int_{-\infty}^{\infty} dx \psi_3 \hat{p} \psi_1 = 0$.
12. Στον Κ.Α.Τ. για την θεμελιώδη κατάσταση στο Σ.Ι., ισχύει $\psi_0 = \left(\frac{2m\omega}{\hbar\pi}\right)^{(1/4)} e^{-\frac{m\omega x^2}{\hbar}}$.
13. Σε τετραγωνικού σχήματος ΑΠΔ η 2η διεγερμένη ενεργειακή κατάσταση είναι εκφυλισμένη.
14. Σε ΑΠΔ δισκοειδούς σχήματος ακτίνας a οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας είναι $\frac{\hbar^2 x_{0n}^2}{2ma^2}$, όπου x_{0n} είναι οι ρίζες της εξίσωσης $J_0(ka) = 0$, με J_0 την συνάρτηση Bessel 1ης τάξης μηδενικού βαθμού.
15. Θεωρούμε δυναμικό $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$. Αν $|\psi(x, y, t=0)\rangle = (|0\rangle_x |1\rangle_y + |1\rangle_x |0\rangle_y) / \sqrt{2}$. το $\langle \vec{r} \rangle(t) = 0$.
16. Η θεμελιώδης κατάσταση στις κβαντικές τελείες δεν είναι εκφυλισμένη.
17. Ηλεκτρόνιο που κινείται στην επιφάνεια σφαίρας σε κατάσταση, $|N| [i \cdot |20\rangle - 3|11\rangle]$, έχει μηδενική μέση x -συνιστώσα της στροφορμής.
18. Στην θεμελιώδη κατάσταση του ατόμου του υδρογόνου η μέση δυναμική ενέργεια του είναι -1.