ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι 10 <u>Σεπτέμβρη</u> 2018 (Διδάσκων: Αντρέας Φ. Τερζής) $\circledast i\hbar x p_x + i\hbar x p_x + i\hbar p_x x + i\hbar p_x x = i\hbar(x p_x + p_x x)$

Άρα $[(\Delta x^2)(\Delta p_x^2)]_{min} = \hbar|\langle x p_x + p_x x\rangle|$.

ΘΕΜΑ 1 Να βρεθεί η μικρότερη δυνατή τιμή του γινομένου των αβεβαιοτήτων $\left(\Delta(x^2)\right)\left(\Delta(p_x^2)\right)$.

$\Delta(x^2)\Delta(p_x^2) \geq \frac{1}{2}|\langle [x^2, p_x^2]\rangle|$, $[x^2, p_x^2] = x[x, p_x^2] + [x, p_x^2]x = x p_x [x, p_x] + x[x,p_x]p_x + p_x[x,p_x]x + [x,p_x]p_x x = \circledast$

ΘΕΜΑ 2 Θεωρούμε ένα ερμιτιανό τελεστή $W = |w|\cdot\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\right)$, με Χαμιλτονιανή H, $H = \begin{bmatrix} 0 & \varepsilon \\ \varepsilon & 0 \end{bmatrix}$ Ιδιοτιμές $\det(H-\lambda I) = 0 \to \lambda^2 - \varepsilon^2 = 0 \to \lambda = \pm\varepsilon$

Ιδιοσυναρτήσεις βρίσκονται πολύ εύκολα ότι είναι $|+\rangle = \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}$ & $|-\rangle = \frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}$

(2α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας.

→ απάντηση εφ. (2β). Η γενική μορφή της $|\psi(x,t)\rangle$ είναι $|\psi(x,t)\rangle = c_+ e^{-i\varepsilon t/\hbar}|+\rangle + c_- e^{i\varepsilon t/\hbar}|-\rangle \to |\psi(x,0)\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle$

Οπότε η μέση τιμή του W είναι $\langle w\rangle = \langle\psi(x,0)|\hat{W}|\psi(x,0)\rangle = (c_+\langle +| + c_-\langle -|)(|w||1\rangle\langle 1| - |w||2\rangle\langle 2|)(|+\rangle c_+ + |-\rangle c_-)$

Την χρονική στιγμή t=0, βρίσκουμε $\langle W\rangle = 4|w|/5$. **(2β)** Να βρεθεί η $\psi(x,t)$. όπου θεωρούμε τους συντελεστές c_+ & c_- πραγματικούς καθώς δεν έχουμε αρκετές πληροφορίες να βρούμε την μιγαδική "φύση" τους.

Έτσι $\frac{\langle w\rangle}{|w|} = c_+^2\langle +|1\rangle\langle 1|+\rangle + c_+c_-\langle +|1\rangle\langle 1|-\rangle - c_+^2\langle +|2\rangle\langle 2|+\rangle - c_+c_-\langle +|2\rangle\langle 2|-\rangle + c_-c_+\langle -|1\rangle\langle 1|+\rangle + c_-^2\langle -|1\rangle\langle 1|-\rangle$
$- c_-c_+\langle -|2\rangle\langle 2|+\rangle - c_-^2\langle -|2\rangle\langle 2|-\rangle = [$αφού $\langle +|1\rangle = \langle +|2\rangle = 1/\sqrt{2}$, $\langle -|1\rangle = 1/\sqrt{2}$ & $\langle -|2\rangle = -1/\sqrt{2}] = \ldots 2c_+c_-$

Οπότε $\langle w\rangle = 2c_+c_-|w| = 4|w|/5 \to c_+c_- = 2/5$ & $c_+^2 + c_-^2 = 1$ που δίνει $(c_+, c_-) = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ ή $\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$. Διαλέγοντας το $\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ έχουμε $|\psi(x,t)\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}\left(\frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}\right)e^{-i\varepsilon t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}\right)e^{i\varepsilon t/\hbar}$ [και βγάζοντας κοινό παράγοντα το $e^{-i\varepsilon t/\hbar}$] $= \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\ldots\frac{e^{2i\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{10}}\right)|1\rangle + \left(\sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{e^{i\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{10}}\right)$.

ΘΕΜΑ 3 Ηλεκτρόνιο μάζας m βρίσκεται περιορισμένο σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού μήκους L. Αν η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου είναι $\psi(x,t=0) = |c_1|e^{i\varphi_{12}}\psi_1 + |c_2|\psi_2$ και γνωρίζουμε ότι $\langle E\rangle = 5\hbar^2\pi^2/4mL^2$ και $\langle x\rangle(t=0) = L/2$ να βρεθούν **(3α)** η $\psi(x,t)$, **(3β)** η πιθανότητα να μετρήσω την ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης και **(3γ)** το $\langle x\rangle(t)$. $x_{21} = -16L/9\pi^2$, $p_{21} = -8i\hbar/3L$.

(α) Από $\langle E\rangle = P_1E_1 + P_2E_2$ & $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ & $\langle x\rangle(t=0) = \frac{L}{2} + \frac{16L}{9\pi^2}\cos(\varphi_{12} + \delta_{21}^x) = \frac{L}{2}$ (όπου $x_{21} = |x_{21}|e^{i\delta_{21}^x}$, $|x_{21}| = \frac{16L}{9\pi^2}$ & $\delta_{21}^x = \pi$)

βρίσκουμε $\psi(x,t) = (i\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar} + \psi_2 e^{-iE_2t/\hbar})/\sqrt{2}$ (είναι η ίδια άσκηση με αστ.3 εξέτασης Γενάρη 2019).

(β) $P_{E_1} = \left|\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-iE_1t/\hbar}\right|^2 = \frac{1}{2}$ (50%) (γ) $\langle x\rangle(t) = \frac{L}{2} + |x_{21}|\cos(\omega t + \varphi_{12} + \delta_{21}^x) = \frac{L}{2} + \frac{16L}{9\pi^2}\cos\left(\omega t + \frac{3\pi}{2}\right)$

Άρα $\langle x\rangle(t) = \frac{L}{2} + \frac{16L}{9\pi^2}\sin(\omega t)$, όπου $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$ & $E_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$.

ΘΕΜΑ 4 Να βρείτε τον συντελεστή ανάκλασης για σκέδαση από το $+\infty \to -\infty$ σε δυναμικό $V(x) = -|g|\cdot\delta(x - x_0)$. Εδώ θέλω $R = 1 - T = \frac{m|g|^2/2\hbar^2}{E + m|g|^2/2\hbar^2}$

Πρακτικά ίδια με άσκηση 4, εξ. Γενάρη 2019. Τόσο η $\delta(x)$ είναι μετατοπισμένη δω αλλά ίδια η φυσική.

ΘΕΜΑ 5 Θεωρούμε σκέδαση ηλεκτρονίου σε δυναμικό $V_0\cdot\Theta(x + L/2)\cdot\Theta(L/2 - x)$. Αν $L = 1nm$ και $V_0 = 1eV$. Να αποδείξτε για ενέργεια προσπίπτοντος ηλεκτρονίου $E = 7eV$ παρατηρείται συντονισμός.

$E > V_0$ Συντονισμός για $E = V_0 + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$.

$\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{h^2}{8mL^2} = \frac{6{,}626^2}{9{,}1\cdot 8\cdot 1{,}6}\,eV \sim 0{,}377\,eV = \frac{3}{8}eV$

Άρα $E = V_0 + \frac{3}{8}n^2\,(eV) = 1 + \frac{3}{8}n^2$, για $n = 4$

$E = 1 + \frac{3\cdot 16}{8} = 1 + 6 = 7$ (eV).

ΘΕΜΑ 6 Ηλεκτρόνιο βρίσκεται περιορισμένο σε δυναμικό κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή. Αν η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου είναι $\psi(x,t) = |c|\left(\psi_0(x)e^{-i\varepsilon t} + i\cdot\psi_2(x)e^{-i(\varepsilon+2)t}\right)$. Να βρεθούν **(6α)** η μέση ενέργεια σε eV αν $\omega = 2\pi\cdot 10^{14} rad/s$, **(6β)** το $\langle x\rangle(t=0)$ με την αλγεβρική μέθοδο και **(6γ)** ο ρυθμός μεταβολής της μέσης ορμής χρησιμοποιώντας την έκφραση με τον μεταθέτη.

$|c|^2 + |c|^2 = 1 \to |c| = 1/\sqrt{2}$ $\langle E\rangle = P_0\varepsilon + P_2(\varepsilon + 2) = \frac{1}{2}(2\varepsilon + 2) = \frac{1}{2}(2\cdot\frac{1}{2} + 2) = \frac{3}{2}$ $(\varepsilon = 1/2)$. Άρα $\langle E\rangle = \frac{3}{2}\hbar\omega = 0{,}62\,eV$

καθώς $\hbar\omega = \frac{h}{2\pi}\omega = \frac{6{,}626}{2\pi}2\pi\cdot 10^{-34}\cdot 10^{14}\,\frac{10^{19}}{1{,}6}\,eV = 0{,}41\,eV$. (β) $\langle x\rangle(t=0) = \frac{(\langle 0| - i\langle 2|)}{\sqrt{2}}\frac{(a + a^\dagger)}{\sqrt{2}}\frac{(|0\rangle + i|2\rangle)}{\sqrt{2}} =$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}[\langle 0|a|0\rangle + i\langle 0|a|2\rangle + \langle 0|a^\dagger|0\rangle + i\langle 0|a^\dagger|2\rangle - \langle 2|a|0\rangle + i\langle 2|a|2\rangle - \langle 2|a^\dagger|0\rangle + i\langle 2|a^\dagger|2\rangle] =$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}[0 + i\langle 0|1\rangle + \langle 0|1\rangle + i\langle 0|3\rangle\sqrt{3} - 0 - i\langle 2|1\rangle - \langle 2|1\rangle - i\langle 2|3\rangle\sqrt{3}] = 0$. Ακόμα και να βάλουμε την χρονική εξάρτηση $\langle x\rangle(t) = 0$ (για επαλήθευση κάντε τις πράξεις). (γ) Από τον τύπο $\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [A, H]\rangle$

έχουμε $\frac{d\langle p\rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [p, H]\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle [p, \frac{1}{2}x^2]\rangle = \frac{i\hbar}{i\hbar}\langle x\rangle = \langle x\rangle$ Άρα $\frac{d\langle p\rangle(t)}{dt} = \langle x\rangle(t) = 0$.

ΘΕΜΑ 7 Για ηλεκτρόνιο περιορισμένο σε τετραγωνικό Α.Π.Δ. πλευράς μήκους L, να βρεθούν οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας της 1[ης] διεγερμένης κατάστασης. $E_{n_x n_y} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}(n_x^2 + n_y^2)$ θεμελιώδης $(n_x, n_y) = (1,1)$ 1η διεγερμένη $(1,2)$ & $(2,1)$

$\psi_{1,2} = \left(\sqrt{\frac{2}{L}}\right)^2\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right) = \frac{2}{L}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi y}{L}\right)$ & $\psi_{2,1} = \frac{2}{L}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi y}{L}\right)$.

ΘΕΜΑ 8 Ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(\vec{r}, t=0) = |N|\left(\psi_{200}(\vec{r}) + \psi_{211}(\vec{r})\right)$.

(8α) Να υπολογίστε τον συντελεστή κανονικοποίησης. $|N|^2 + |N|^2 = 1 \to |N| = 1/\sqrt{2}$. Πρακτικά έχουμε στάσιμη κατάσταση

(8β) Να υπολογίστε την μέση ενέργεια $\langle E\rangle$. με μία ενέργεια με $n=2$. $\Psi(\vec{r}, t) = \frac{(\psi_{200} + \psi_{211})}{\sqrt{2}}e^{-E_2t/\hbar} \sim \frac{\psi_{200} + \psi_{211}}{\sqrt{2}}$

Άρα $\langle E\rangle = -\frac{1}{2\cdot 2^2} = -\frac{1}{8}$.

(8γ) Να υπολογίστε την $\langle l^2\rangle(t)$ την τυχαία χρονική στιγμή t. $\langle l^2\rangle = P_{200}\cdot 0(0+1) + P_{211}\cdot 1\cdot(1+1) = \frac{2}{2} = 1$

$\langle l_x\rangle(t) = \frac{\langle 200| + \langle 211|}{\sqrt{2}}\frac{(l_+ + l_-)}{2}\frac{(|200\rangle + |211\rangle)}{\sqrt{2}} = 0$ καθώς εμφανίζονται

(8δ) Να υπολογιστεί η $\langle l_x\rangle(t)$, την χρονική στιγμή t=0.

όροι $\langle 200|210\rangle$ & $\langle 211|210\rangle$.

(8ε) Να υπολογιστεί το $\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle(t)$. Ορίζουμε $f(r)$ & $g(r)$ ως $\psi_{200} = f Y_{00}$ & $\psi_{211} = g(r)Y_{11}$, $f = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{r}{2}\right)e^{-r/2}$, $g = \frac{re^{-r/2}}{\sqrt{24}}$

$\left\langle\frac{1}{r}\right\rangle = \int\frac{(f^*Y_{00}^* + g^*Y_{11}^*)}{\sqrt{2}}\frac{1}{r}\frac{(fY_{00} + gY_{11})}{\sqrt{2}}d\Omega\, r^2dr = \frac{1}{2}\int f^2\frac{r^2}{r}dr\int Y_{00}^*Y_{00}d\Omega + \frac{1}{2}\int fg\frac{r^2}{r}dr\int Y_{00}^*Y_{11}d\Omega +$

$+ \frac{1}{2}\int gf\frac{r^2}{r}dr\int Y_{11}^*Y_{00}d\Omega + \frac{1}{2}\int g^2\frac{r^2}{r}\ldots Y_{11}^*Y_{11}d\Omega = \frac{1}{2}\int f^2 r\,dr + \frac{1}{2}\int g^2 r\,dr$ {λόγω ορθογωνιότητας σφαιρικών αρμονικών Y_{lm}}

$= \frac{1}{2}\int\frac{1}{2}\left(1 - \frac{r}{2}\right)^2e^{-r}r\,dr + \frac{1}{2}\int\frac{1}{24}r^2e^{-r}r\,dr = \frac{1}{4}\int\left(r - r^2 + \frac{r^3}{4}\right)e^{-r}dr + \frac{1}{48}\int r^3e^{-r}dr =$

$= \frac{1}{4}\left(1! - 2! + \frac{3!}{4}\right) + \frac{3!}{48} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.