ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι. Τελικό 26/1/17. (Α. Φ. Τερζής)

ΘΕΜΑ 1. Ίδιο με ΘΕΜΑ1 (1β&1ε) 1ης προόδου (20/11/2017)

ΘΕΜΑ 2. Η συνάρτηση $\Theta(\frac{L}{2}-|x|)$ αποκαλύπτει ότι έχουμε Συμμετρικό Α.Π.Δ. Με $\psi_n(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\cos(\frac{n\pi x}{L})\Theta(\frac{L}{2}-|x|)$ τις άρτιες ιδιοσυναρτήσεις και $n=1,3,5$ (περιττές). Άρα $\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1(x)+\psi_3(x))$ οπότε αν $E_n=E_1 n^2$ $E_1=\hbar^2\pi^2/2mL^2$

(2α) $\psi(x,t)=(\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar}+\psi_3 e^{-i9E_1t/\hbar})/\sqrt{2}$ (2β) $\langle$Αρτιότητα$\rangle=\frac{1}{2}(+1)+\frac{1}{2}(+1)=1$ (δύο άρτιες ιδιοσυναρτήσεις).

(2γ) $\langle E\rangle=P_1E_1+P_3E_3=\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{2}E_3=\frac{1}{2}(E_1+E_1 3^2)=\frac{10}{2}E_1=5E_1=5\hbar^2\pi^2/2mL^2$ (2δ) $\langle x\rangle(t)=|c_1|^2x_{11}+|c_3|^2x_{33}+2|c_1||c_3||x_{31}|\cdot\cos(\omega t+\varphi_{13}+\rho^x_{31})$

$x_{11}=x_{33}=0$ (συμμετρικό Α.Π.Δ.) $x_{31}=0$ (ψ_1 & ψ_3 άρτιες με το x συνολικά περιττή συνάρτηση) Άρα $\langle x\rangle(t)=(\psi(x,t),\hat{x}\,\psi(x,t))=0$

Ισοδύναμα λέμε ότι $\psi(x,t)$ άρτια καθώς ψ_1 & ψ_3 άρτιες άρα $\langle x\rangle(t)=0$. Πιο γενικά $\hat{p}\,\psi(x,t)$ είναι περιττή συνάρτηση

(2ε) Υπολογιστικά $\langle p\rangle(t)=0$ καθώς $p_{31}=0$ (μηδενίζει το ολοκλήρωμα). Πιο γενικά $\hat{p}\,\psi(x,t)$ είναι περιττή συνάρτηση αφού $\hat{p}$ είναι παράγωγος και $\psi(x,t)$ άρτια. Οπότε $(\psi(x,t),\hat{p}\,\psi(x,t))=0$

(2στ) Αφού $\psi(x,t)$ άρτια, συνεχώς $\langle$αρτιότητα$\rangle=+1$. Αλλιώς αρχικά $(t=0)$ $\langle$αρτιότητα$\rangle=+1$ και έχουμε διατήρηση της λόγω συμμετρικού δυναμικού. (2ζ) Έχουμε μόνο κινητική ενέργεια στο Α.Π.Δ.

Οπότε $\langle T\rangle=\langle\frac{p^2}{2m}\rangle=\langle E\rangle\xrightarrow{(2\gamma)}\frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\longrightarrow\langle p^2\rangle(t)=5\hbar^2\pi^2/L^2$, Δοκιμάστε και το $\langle p^2\rangle(t)=|c_1|^2p^2_{11}+|c_3|^2p^2_{33}+2|c_1||c_3||p^2_{31}|\cos\ldots$

(2η) $(\Delta E)=(E_3-E_1)/2=4E_1=2\hbar^2\pi^2/mL^2$

ΘΕΜΑ 3 (3α) Ο πίνακας είναι διαγώνιος, άρα $H|1\rangle=\varepsilon|1\rangle$ & $H|2\rangle=0|2\rangle$. Ιδιοτιμές ε & 0 και ιδιοσυναρτήσεις $|1\rangle$ & $|2\rangle$, αντίστοιχα. (3β) $\psi(x,0)=|1\rangle$ (από μέτρηση του $\hat{W}$, θετική τιμή $+\omega$)

Άρα $\psi(x,t)=|1\rangle$ (στάσιμη κατάσταση, το $e^{-i\varepsilon t/\hbar}$ δεν "αλλάζει" κάτι).

(3γ) Οπότε προφανώς $\langle W\rangle=+\omega$. (3δ) Ο τελεστής $\hat{O}$ δεν είναι διαγώνιος. Σε μορφή πίνακα είναι

$\begin{bmatrix}0 & i\omega\\ -i\omega & 0\end{bmatrix}\longrightarrow$ Διαγωνοποίηση $\det\begin{bmatrix}-\lambda & i\omega\\ -i\omega & -\lambda\end{bmatrix}=0\to\lambda^2-\omega^2=0\to\lambda_\pm=\pm\omega$ και $|+\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$, $|-\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}-i\\1\end{bmatrix}$

Οι δυνατές τιμές είναι οι ~~ιδιοτιμές~~ $+\omega$ & $-\omega$. $P_{+\omega}=|\langle+|\psi(x,t)\rangle|^2=|\langle+|1\rangle|^2=|\frac{i}{\sqrt{2}}|^2=1/2$ & $P_{-\omega}=1/2$

(3ε1) $\langle\hat{O}\rangle=\langle\psi(x,t)|\hat{O}|\psi(x,t)\rangle=\langle1|[i\omega(|1\rangle\langle2|-|2\rangle\langle1|)]|1\rangle=i\omega\langle1|1\rangle\langle2|1\rangle-i\omega\langle1|2\rangle\langle1|1\rangle=0$

Άρα $d\langle\hat{O}\rangle/dt=0$ και (3ε2) $d\langle\hat{O}\rangle/dt=\langle[\hat{O},\hat{H}]\rangle/i\hbar$ $[\hat{O},\hat{H}]=i\omega\varepsilon\left(\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\right)=i\omega\varepsilon\begin{bmatrix}0&-1\\-1&0\end{bmatrix}$

και $\langle[\hat{O},\hat{H}]\rangle=\langle\psi|[\hat{O},\hat{H}]|\psi\rangle=\langle1|(i\omega\varepsilon(|1\rangle\langle2|+|2\rangle\langle1|))|1\rangle=0\to d\langle\hat{O}\rangle/dt=0$

ΘΕΜΑ 4 Από λύσεις Θέμα 1α, 2ης προόδου 2017, έχουμε $\lambda=L\sqrt{w}=5{,}12\cdot L$ (στο nm). Για να έχω δύο (ακριβώς) δέσμιες πρέπει

$n=1$ να είναι λύση οπότε $\frac{1\cdot\pi}{2\lambda}\le1\to\lambda\ge\frac{\pi}{2}$

$n=2$ να είναι εκτός οπότε $\frac{2\cdot\pi}{2\lambda}>1\to\lambda<\pi$

$\longrightarrow\frac{\pi}{2}\le5{,}12L\le\pi\to\frac{\pi}{5{,}12}\le2L\le\frac{2\pi}{5{,}12}\to0{,}61nm\le2L\le1{,}23nm$

"Εύρος" είναι $2L$.

ΘΕΜΑ 5 Έχουμε μόνο μια δέσμια κατάσταση, άρα $\langle E\rangle=-mc^2/2\hbar^2$.

Πράξεις στο Θέμα 3 (Γεωργής, σελ. στους 12-13) και $\langle E\rangle=-0{,}77\,eV$

ΘΕΜΑ 6 Το ΘΕΜΑ 4 της 2ης προόδου (φέτος). Απλά το δυναμικό μετατοπισμένο κατά L προς τα ...

ΘΕΜΑ 7 Είναι ίδιο με το Θέμα 6 της 2ης προόδου. Άρα (7α) $\langle p\rangle(t)=-\sin t/\sqrt{2}$ και το (7β) είναι λυμένο στην 2η πρόοδο.

ΘΕΜΑ 8 Από $\langle E\rangle=1\to|c_0|^2\frac{1}{2}+|c_1|^2\frac{3}{2}=1\to|c_0|=|c_1|=1/\sqrt{2}$ και $\langle x\rangle(t=0)=|c_0|^2x_{00}+|c_1|^2x_{11}+2|c_0||c_1||x_{10}|\cos(\varphi_{01}+\rho^x_{10})$

Αφού $x_{00}=x_{11}=0$ και $x_{10}=1/\sqrt{2}$ (Βλέπε Θέμα 5, 2ης προόδου) $\to\langle x\rangle(0)=0=\cos(\varphi_{01})\to\varphi_{01}=\pi/2$

και (8α) $\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\pi/2}\psi_0+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1\to\psi(x,t)=(i\psi_0e^{-it/2}+\psi_1e^{-3it/2})/\sqrt{2}$. Η $\psi(x,t)$ είναι ίδια με αυτή του Θέματος 5 στη 2η πρόοδο ..., άρα (8β) $\langle x\rangle(t)=-\sin t/\sqrt{2}$

ΘΕΜΑ 9 $V(x,y)=\frac{1}{2}m\omega^2(x^2+4y^2)=\frac{1}{2}m\omega^2x^2+\frac{1}{2}m(2\omega)^2y^2=V_x(x)+V_y(y)$ Δύο αρμονικοί ταλαντωτές με ιδιοσυχνότητες ω & 2ω. Άρα $E_{xy}=E_{n_x,n_y}=(n_x+\frac{1}{2})\hbar\omega+(n_y+\frac{1}{2})\hbar2\omega=(n_x+2n_y+\frac{3}{2})\hbar\omega$ με n_x,n_y $0,1,2\ldots$

Πινακάκι για βοήθεια

n_x	n_y	$E_{n_xn_y}-3/2$
0	0	0
0	1	2
1	0	1
1	1	3
2	0	2
0	2	4

$\leftarrow$ $E_{01}=E_{20}$ με ιδιοσυναρτήσεις ψ_{01} & ψ_{20}

$E_{01}=E_{20}=\frac{7}{2}\hbar\omega$

ΘΕΜΑ 10

Αν πολλαπλασιάσουμε την $\psi(\vec{r})$ με $-i\to(-i)\psi(\vec{r})=N(-i^2\psi_{200}+i\psi_{211})=N(\psi_{200}+i\psi_{211})$

Αυτή η "ισοδύναμη" κυματοσυνάρτηση είναι ίδια με την κυματοσυνάρτηση στο ΘΕΜΑ 5 του Σεπτέμβρη 2017. Όλα τα άλλα ίδια ...