ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

Τελική Εξέταση: 1 Φλεβάρη 2016 (Διδάσκων: Α.Φ. Τερζής)

ΘΕΜΑ 1

(α) Από την μορφή της Χαμιλτονιανής $H = \varepsilon(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + \sqrt{2}i\varepsilon(|2\rangle\langle 3| - |3\rangle\langle 2|)$, ή από την μορφή του πίνακα $H = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \sqrt{2}i\varepsilon \\ 0 & -\sqrt{2}i\varepsilon & 0 \end{bmatrix}$ καταλαβαίνουμε ότι μία ιδιοκατάσταση είναι η $|1\rangle$ με ενέργεια ε (όσοι αμφιβάλλουν να κάνουν την διαγωνοποίηση του πίνακα).

Έτσι για τις άλλες δύο ιδιοτιμές έχουμε, $\det\begin{bmatrix} \varepsilon-\lambda & \sqrt{2}i\varepsilon \\ -\sqrt{2}i\varepsilon & 0\text{-}\lambda \end{bmatrix} = \lambda(\lambda-\varepsilon) - 2\varepsilon^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{2,3} = -\varepsilon, 2\varepsilon$.

Ιδιοσυνάρτηση $\lambda_2 = -\varepsilon$, $\begin{bmatrix} 2\varepsilon & \sqrt{2}i\varepsilon \\ -\sqrt{2}i\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -\sqrt{2}i\varepsilon x_2 + \varepsilon y_2 = 0 \Rightarrow y_2 = \sqrt{2}i x_2$, ενώ από την κανονικοποίηση έχουμε $|x_2|^2 + |y_2|^2 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{2}i \end{bmatrix}$.

Ανάλογα για $\lambda_3 = 2\varepsilon$, $\begin{bmatrix} -\varepsilon & \sqrt{2}i\varepsilon \\ -\sqrt{2}i\varepsilon & -2\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow -\varepsilon x_3 + \sqrt{2}i\varepsilon y_3 = 0 \Rightarrow x_3 = \sqrt{2}i y_3$, ενώ από την κανονικοποίηση έχουμε $|x_3|^2 + |y_3|^2 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix} \sqrt{2}i \\ 1 \end{bmatrix}$.

Ο A είναι $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}$, δηλαδή $A = 0|1\rangle\langle 1| + a|2\rangle\langle 2| - a|3\rangle\langle 3|$ και ο $B = b|1\rangle\langle 1| - b|3\rangle\langle 3|$, όπου a και b πραγματικοί..

Την χρονική στιγμή t=0, μετράμε τα φυσικά μεγέθη που σχετίζονται με τους τελεστές A και B και βρίσκουμε μηδενική τιμή και τιμή b, αντίστοιχα.

(β) Άρα $|\Psi(x, t=0)\rangle = |1\rangle$ η οποία είναι ιδιοκατάσταση της ενέργειας με ιδοτιμή ε. Έτσι η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$, είναι $|\Psi(x,t)\rangle = |1\rangle e^{-\frac{\varepsilon t}{\hbar}}$, στάσιμη κατάσταση δηλαδή και πρακτικά $|\Psi(x,t)\rangle = |1\rangle$.

(γ) Προφανώς οι μετρήσεις θα δώσουν τιμές 0 και ε για τα φυσικά μεγέθη A και H αντίστοιχα με σιγουριά (100% πιθανότητα).

(δ) Ισχύει η σχέση $i\hbar\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \langle[A,H]\rangle$.

Υπολογίζουμε τον μεταθέτη,

$$[A,H] = \left(a|2\rangle\langle 2| - a|3\rangle\langle 3|\right)\left(\varepsilon(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + \sqrt{2}i\varepsilon(|2\rangle\langle 3| - |3\rangle\langle 2|)\right) -$$
$$\left(\varepsilon(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + \sqrt{2}i\varepsilon(|2\rangle\langle 3| - |3\rangle\langle 2|)\right)\left(a|2\rangle\langle 2| - a|3\rangle\langle 3|\right) =$$
$$a\varepsilon\left(|2\rangle\langle 2| + \sqrt{2}i|2\rangle\langle 3| + \sqrt{2}i|3\rangle\langle 2|\right) - a\varepsilon\left(|2\rangle\langle 2| - \sqrt{2}i|2\rangle\langle 3| - \sqrt{2}i|3\rangle\langle 2|\right) = 2\sqrt{2}ia\varepsilon\left(|2\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 2|\right).$$

Ή χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση με πίνακες,

$$AH - HA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \sqrt{2}i\varepsilon \\ 0 & -\sqrt{2}i\varepsilon & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & \sqrt{2}i\varepsilon \\ 0 & -\sqrt{2}i\varepsilon & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} = 2\sqrt{2}ia\varepsilon\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Καθώς $\left\langle \left[A,H\right] \right\rangle = \left\langle \Psi(x,t) \right| 2\sqrt{2}ia\varepsilon \left(\left|2\right\rangle\left\langle 3\right| + \left|3\right\rangle\left\langle 2\right| \right) \left| \Psi(x,t) \right\rangle = \left\langle 1 \right| 2\sqrt{2}ia\varepsilon \left(\left|2\right\rangle\left\langle 3\right| + \left|3\right\rangle\left\langle 2\right| \right) \left| 1 \right\rangle = 0,$

ο ρυθμός μεταβολής είναι μηδενικός, $\dfrac{d\left\langle A \right\rangle}{dt} = 0$.

ΘΕΜΑ 2

(α) $\left(yp_y + p_x z\right)^\dagger = \left(yp_y\right)^\dagger + \left(p_x z\right)^\dagger = p_y^\dagger y^\dagger + z^\dagger p_x^\dagger = p_y y + z p_x \neq y p_y + p_x z$, καθώς. Άρα ο τελεστής <u>δεν</u> είναι ερμιτιανός.

(β) $\Delta p_x \Delta l_x \geq \dfrac{1}{2}\left|\left\langle \left[p_x, l_x\right] \right\rangle\right| = \dfrac{1}{2}\left|\left\langle \left[p_x, yp_z - zp_y\right] \right\rangle\right| = 0$.

ΘΕΜΑ 3

Από την υπόδειξη έχουμε ιδιοσυναρτήσεις απειρόβαθου πηγαδιού δυναμικού πάχους L,

$\psi_n^L(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin(\dfrac{n\pi x}{L})\cdot\Theta(x)\cdot\Theta(L-x)$ και πηγαδιού πάχους $3L$, $\psi_n^{3L}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{3L}}\sin(\dfrac{n\pi x}{3L})\cdot\Theta(x)\cdot\Theta(3L-x)\cdot$

Οι συντελεστές c_n υπολογίζονται από τις σχέσεις, $c_n = \left(\psi_n^{3L}(x), \Psi(x,t=0)\right)$, όπου αρχική κατάσταση 1η διεγερμένη (n=2), άρα $\Psi(x,t=0) = \psi_2^L(x) = \sqrt{\dfrac{2}{L}}\sin(\dfrac{2\pi x}{L})\cdot\Theta(x)\cdot\Theta(L-x)\cdot$

Έτσι $c_n = \displaystyle\int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{2\pi x}{L})\sqrt{\frac{2}{3L}}\sin(\frac{n\pi x}{3L})dx = \frac{2}{\sqrt{3}L}\int_0^L \sin(\frac{2\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi x}{3L})dx$.

ΘΕΜΑ 5

Θεωρούμε σκέδαση ηλεκτρονίου σε ορθογώνιο φράγμα δυναμικό πάχους L και ύψους V_0 και $E > V_0$.

Ο συντελεστής διέλευσης υπολογίζεται από την σχέση, $T = \dfrac{4E(E\text{-}V_0)}{4E(E\text{-}V_0) + V_0^2 \sin^2(\frac{\sqrt{2m(E\text{-}V_0)L^2}}{\hbar})}$.

(α) Συντονισμός για $\sin^2(\dfrac{\sqrt{2m(E\text{-}V_0)L^2}}{\hbar}) = 0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2m(E\text{-}V_0)L^2}}{\hbar} = n\pi \Rightarrow E = V_0 + \dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$.

(β) Για ύψος του φράγματος 1eV και πάχος 1nm, έχουμε

$\dfrac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \dfrac{h^2}{8mL^2} = \dfrac{6.626^2\times10^{-68}}{8\times9.1\times10^{-31}\times10^{-18}} = 0.6\times10^{-19}J = 0.377\text{eV}$, άρα η ελάχιστη τιμή για το μικρότερο n, n=1 δίνει $E = 1eV + 0.377eV = 1.377eV$.

ΘΕΜΑ 6

Αρμονικός ταλαντωτής στις δύο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις του με $\left\langle E \right\rangle = 1$, άρα έχουμε $\left\langle E \right\rangle = P_0\cdot\dfrac{1}{2} + P_1\cdot\dfrac{3}{2} = 1$ και $P_0 + P_1 = 1$, όποτε $P_0 = P_1 = \dfrac{1}{2}$ και $|c_0| = |c_1| = 1/\sqrt{2}$.

Γενικά ισχύει για $\Psi(x,t) = |c_0| e^{i\varphi_{01}}\psi_0 e^{-it/2} + |c_1|\psi_1 e^{-i3t/2}$ η μέση τιμή οποιοδήποτε τελεστή είναι,

$\left\langle A \right\rangle(t) = |c_0|^2 A_{00} + |c_1|^2 A_{11} + 2|c_0||c_1||A_{01}|\cos\left(\omega t + \varphi_{01} + \delta\right)$, όπου στο φυσικό σύστημα μονάδων για το πρόβλημά μας ισχύει $\omega = 3/2 - 1/2 = 1$ και $A_{01} = |A_{01}|e^{-i\delta}$. Για την ορμή και για t=0 έχουμε (καθώς ισχύει $p_{00} = p_{11} = 0$) ότι $\left\langle p \right\rangle(t=0) = 2|c_0||c_1||p_{01}|\cos\left(\varphi_{01} + \delta\right)$.

Υπολογίζουμε το p_{01},

$$p_{01}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0^*\hat{p}\psi_1\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-x^2/2}\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\sqrt[4]{\frac{4}{\pi}}xe^{-x^2/2}\right)dx=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}\left(1-x^2\right)e^{-x^2/2}dx=$$

$$-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx-\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx\right)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\sqrt{\pi}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)=\frac{-i}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\frac{\pi}{2}}=|p_{01}|e^{-i\delta},$$ άρα

$|p_{01}|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ και $\delta=\dfrac{\pi}{2}$, οπότε $\langle p\rangle(t=0)=2|c_0||c_1||p_{01}|\cos(\varphi_{01}+\pi/2)=-\sin(\varphi_{01})/\sqrt{2}$ και αφού $\langle p\rangle(t=0)=0$ βρίσκουμε ότι $\varphi_{01}=0$.

Και (φυσικά!) το αποτέλεσμα του (β) ερωτήματος, $\langle p\rangle(t)=-\sin(t)/\sqrt{2}$.

(α) Μέση αρτιότητα για t=0, $\langle\text{Αρτιοτητα}\rangle=P_0\cdot(+1)+P_1\cdot(\text{-}1)=\frac{1}{2}\cdot(+1)+\frac{1}{2}\cdot(\text{-}1)=0$.

(β) Μέση τιμή της ορμής από την σχέση

$$\int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x,t)\hat{p}\Psi(x,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\psi_0e^{-it/2}+\psi_1e^{-i3t/2}}{\sqrt{2}}\right)^*\left(-i\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\psi_0e^{-it/2}+\psi_1e^{-i3t/2}}{\sqrt{2}}\right)dx=$$

$$\frac{-i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi_0^*e^{it/2}+\psi_1^*e^{i3t/2}\right)\left(\frac{\partial\psi_0}{\partial x}e^{-it/2}+\frac{\partial\psi_1}{\partial x}e^{-i3t/2}\right)dx$$

Υπάρχουν δύο δρόμοι, ο χρονοβόρος που κάνουμε όλες τις πράξεις και αυτός που εκμεταλλευόμαστε την ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων. Για παράδειγμα, αφού

$$\frac{\partial\psi_0}{\partial x}\propto\psi_1\Rightarrow\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0^*\frac{\partial\psi_0}{\partial x}dx=0.$$

Έτσι έχουμε (με τον σύντομο δρόμο)

$$\langle p\rangle(t)=\frac{-i}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\psi_0^*\frac{\partial\psi_1}{\partial x}e^{-it}+\psi_1^*\frac{\partial\psi_0}{\partial x}e^{it}\right)dx=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-x^2/2}\frac{\partial xe^{-x^2/2}}{\partial x}e^{-it}+xe^{-x^2/2}\frac{\partial e^{-x^2/2}}{\partial x}e^{it}\right)dx=$$

$$\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{-x^2/2}\left(1-x^2\right)e^{-x^2/2}e^{-it}+xe^{-x^2/2}\left(-xe^{-x^2/2}\right)e^{it}\right)dx=\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\left(1-x^2\right)e^{-it}-x^2e^{it}\right)e^{-x^2}dx=$$

$$\frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\left(\left(\sqrt{\pi}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)e^{-it}-\frac{\sqrt{\pi}}{2}e^{it}\right)=\frac{i}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left(e^{it}-e^{-it}\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t).$$

(γ) Μέση τιμή της θέσης χρησιμοποιώντας τους τελεστές a,a^+. Υπάρχουν πολλά παλιά θέματα όπου φαίνονται όλες οι πράξεις, ανατρέξτε εκεί για να καταλάβετε γιατί $\langle x\rangle(t)=\cos(t)/\sqrt{2}$ το οποίο επιβεβαιώνεται από την άλλη μεθοδολογία με τα στοιχεία πίνακα x_{ij}.

ΘΕΜΑ 7

Η κυματοσυνάρτηση $\Psi(\vec{r})=N\left(\psi_{200}(\vec{r})+2\psi_{221}(\vec{r})+\psi_{32-1}(\vec{r})\right)$ είναι αυτή της άσκησης 7 (σελίδα 199) του βιβλίου ασκήσεων του κ. Τραχανά με την διαφορά ότι έχουμε την κατάσταση $\psi_{200}(\vec{r})$ αντί της θεμελιώδους $\psi_{100}(\vec{r})$. Έτσι για τα ερωτήματα **(α)** και **(β)** αναμένουμε τα ίδια αποτελέσματα καθώς οι συντελεστές στις ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας και οι κβαντικοί αριθμοί των στροφορμών είναι ίδιοι. Διαφοροποίηση έχουμε στην ενέργεια,

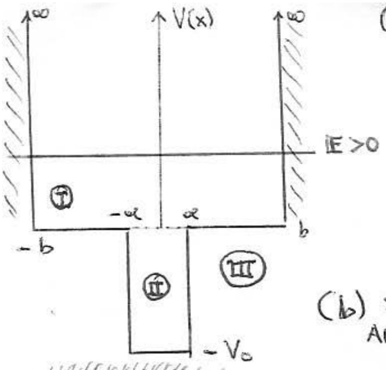
$$\langle E\rangle=P_{200}\left(-\frac{\varepsilon}{2^2}\right)+P_{211}\left(-\frac{\varepsilon}{2^2}\right)+P_{32-1}\left(-\frac{\varepsilon}{3^2}\right)=\frac{1}{6}\left(-\frac{\varepsilon}{4}\right)+\frac{4}{6}\left(-\frac{\varepsilon}{4}\right)+\frac{1}{6}\left(-\frac{\varepsilon}{9}\right)=-\frac{49\varepsilon}{216}=-3,086eV,$$

όπου $\varepsilon=13,6eV$, ενέργεια ιονισμού υδρογόνου. **(γ)** Την τυχαία χρονική στιγμή t, αναμένουμε η $\langle l_x\rangle(t)$ να είναι μηδενική καθώς ο τελεστής της x-συνιστώσα της στροφορμής είναι ένας γραμμικός συνδυασμός τελεστών που αναβιβάζουν ή υποβιβάζουν την z-συνιστώσα και όλες οι προκύπτουσες $\psi_{220},\psi_{222},\psi_{32-2}$ και ψ_{320} είναι ορθογώνιες με τις ψ_{200},ψ_{221} και ψ_{32-1}.

ΘΕΜΑ 4

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε δυναμικό $V(x) = \begin{cases} \infty, & |x| > b \\ 0, & a < |x| < b \\ -V_0, & |x| < a \end{cases}$, όπου $a < b$ και $V_0 \geq 0$.

(α) Να προσδιοριστεί η μορφή των ιδιοσυναρτήσεων της ενέργειας για θετικές ενέργειες.
(β) Να βρεθούν οι συνθήκες από τις οποίες εκτιμούνται οι ιδιοτιμές της θετικής ενέργειας.
(γ) Να μελετηθεί η περίπτωση της μηδενικής ενέργειας.
(δ) Να δείξετε ότι η οριακή περίπτωση για $V_0 \to 0$, αντιστοιχεί σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού.
(ε) Αν $a \to 0$, $V_0 \to \infty$ με $2aV_0 = c$ να βρεθούν οι ιδιοτιμές της ενέργειας.
(στ) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές της ενέργειας για δυναμικό $V(x) = \begin{cases} \infty, & |x| > b \\ -c\delta(x), & |x| < b \end{cases}$ και να συγκριθούν με τα αποτελέσματα του προηγούμενου ερωτήματος.



(α) $\psi_I = A\sin k'(x+b)$, $\psi_{II} = B\cos kx\ (\sin kx)$ [α/π], $\psi_{III} = \mp A\sin k'(x-b)$ [α/π]

[α/π] : [άρτια/περιττά], με $k^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$, $k'^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

Στις περιοχές (I) & (III) οι λύσεις είναι της μορφής αυτής καθώς, γενική λύση για (III) ($\psi'' + k'^2\psi = 0$)

$\psi_{III} = \tilde{A}\cos k'x + \tilde{B}\sin k'x$, αλλά $\psi_{III}(b) = 0 \to \tilde{A}\cos k'b + \tilde{B}\sin k'b = 0$

$\to \tilde{B} = -\tilde{A}\frac{\cos k'b}{\sin k'b} \Rightarrow \psi_{III} = \frac{\tilde{A}\sin k'b\cos k'x - \tilde{A}\cos k'b\sin k'x}{\sin k'b} = \underbrace{-\frac{\tilde{A}}{\sin k'b}}_{A}\sin(x-b)$

(β) ΣΥΝΟΡΙΑΚΕΣ ΣΥΝΘΗΚΕΣ

ΑΡΤΙΕΣ ΙΔΙΟΣ., $x = a$ $\quad -A\sin k'(a-b) = B\cos ka \quad (\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a))$ ①

$-k'A\cos k'(a-b) = -Bk\sin ka \quad (\psi'_{II}(a) = \psi'_{III}(a))$ ②

ΘΕΜΑ 4

Διαιρώντας ①/② συνθήκη για ενέργειες $\boxed{\tan k'(b-a)\tan ka = k'/k}$ (*)

Ανάλογα για περιττές λύσεις ....

(γ) Οριακή $V_0 \to 0$. Τότε $k' = k$ (*) $\to \tan k(b-a)\tan ka = 1 \Rightarrow \sin k(b-a)\sin ka = \cos k(b-a)\cos ka$

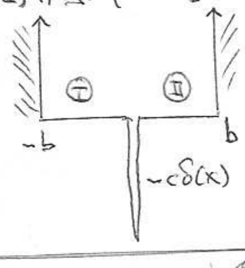
$\to \sin k(b-a)\sin ka - \cos k(b-a)\cos ka = 0 \to \cos(kb - ka + ka) = \cos kb = 0 \to kb = (2n+1)\frac{\pi}{2}$

$\to k(2b) = (2n+1)\pi$. Η ΣΥΝΘΗΚΗ ΓΙΑ ΑΠΕΙΡ. ΠΗΓΑΔΙ ΠΛΑΤΟΥΣ 2b, ΜΕ ΑΡΤΙΕΣ ΛΥΣΕΙΣ.

(δ) Καθώς $a \to 0$, $V_0 \to \infty$ $\quad k^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2} \to \frac{2mV_0}{\hbar^2} \Rightarrow ka = \sqrt{\frac{2mV_0 a}{\hbar^2}}\sqrt{a} \to \sqrt{\frac{mc}{\hbar^2}}\sqrt{a} \to 0$

$\tan k'(b-a)\tan ka = \frac{k'}{\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}} \xrightarrow[V_0 \to \infty]{a \to 0} \tan k'b \cdot ka = \frac{k'}{\sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}} \Rightarrow \tan k'b = \frac{k'}{\sqrt{\frac{mc}{\hbar^2}}\sqrt{\frac{m(2aV_0)}{\hbar^2}}} \Rightarrow \tan k'b = \frac{\hbar^2 k'}{mc}$

(ε) Πάλι μόνο για άρτιες λύσεις $\psi_I = A\sin k'(x+b)$, $\psi_{II} = A'\sin k'(b-x)$, $\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \to A' = A$



ασυνέχεια ψ', $\psi'_{II}(0) - \psi'_I(0) = -\frac{2mc}{\hbar^2}\psi(0) \to$

$-Ak'\cos k'b - Ak'\cos k'b = -\frac{2mc}{\hbar^2}A\sin k'b \Rightarrow \boxed{\tan k'b = \frac{\hbar^2 k'}{mc}}$

(στ) Όταν $E = 0$, οι διαφορικές εξισώσεις Schrödinger στις περιοχές (I) & (III) γίνονται $\psi'' = 0$ με λύση $\psi(x) = Ax + B$. Προφανώς για να ισχύει η συνοριακή συνθήκη $\psi_I(-b) = \psi_{III}(b) = 0$ έχουμε $\psi_I = A(b+x)$, $\psi_{III} = \pm A(b-x)$. Περιττή λύση με $\psi_{III} = A(x-b)$

Στην περιοχή (II) $\psi_{II} = C\sin kx$ (περιττή λύση) με $k^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$.

Συνοριακές συνθήκες $\quad \psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \to C\sin ka = A(a-b)$ ①

$\psi'_{II}(a) = \psi'_{III}(a) \to kC\cos ka = A$ ②

Διαιρώντας ①/② $\to \tan ka = k(a-b) = ka(1 - \frac{b}{a}) \Rightarrow \boxed{\frac{\tan ka}{ka} = 1 - \frac{b}{a}}$ (*)

Για να έχουμε μηδενικές περιττές λύσεις τα V_0 & a, b (δηλαδή τα χαρακτηριστικά μεγέθη του δυναμικού) θα πρέπει να ισχύει η (*)