

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Ολοκληρώματα Gauss, $I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots (2n-1)}{(2\lambda)^n} I_0$, όπου $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$.

Εσωτερικό γινόμενο, $(\Psi(x), \Phi(x)) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \Phi(x) dx$.

Ιδιότητα, $(c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2, d_1 \Phi_1 + d_2 \Phi_2) = c_1^* d_1 (\Psi_1, \Phi_1) + c_1^* d_2 (\Psi_1, \Phi_2) + c_2^* d_1 (\Psi_2, \Phi_1) + c_2^* d_2 (\Psi_2, \Phi_2)$

Συζυγής τελεστή, $(\hat{A}^\dagger \Psi, \Phi) \equiv (\Psi, \hat{A} \Phi)$. Ιδιότητες, $(\hat{A} + \hat{B})^\dagger = \hat{A}^\dagger + \hat{B}^\dagger$ και $(\hat{A} \hat{B})^\dagger = \hat{B}^\dagger \hat{A}^\dagger$.

Ερμητιανός τελεστής, $(\hat{A} \Psi, \Phi) \equiv (\Psi, \hat{A} \Phi)$. Μέση τιμή $\langle \hat{W} \rangle(t) = (\Psi(x, t), \hat{W} \Psi(x, t))$.

Μεταθέτης, $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}$. Ιδιότητες, $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$ και $[\hat{A}, \hat{B} \hat{C}] = \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}] \hat{C}$.

Ισχύουν $[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$ και $i\hbar \frac{d\langle \hat{W} \rangle(t)}{dt} = \langle [\hat{W}, \hat{H}] \rangle$ (απλή εφαρμογή $\frac{d\langle \hat{x} \rangle(t)}{dt} = \langle \hat{p}_x \rangle$).

Σχέσεις αβεβαιότητας, $(\Delta \hat{A})(\Delta \hat{B}) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$.

Χρονοεξαρτώμενη εξίσωση Schrödinger $\hat{H} \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$. Τελεστής $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$

Χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger ή πρόβλημα (διακριτών) ιδιοτιμών ενέργειας, $\hat{H} \psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$.

Σχέσεις ορθοκανονικότητας, $(\psi_n(x), \psi_m(x)) = \delta_{nm}$

$[0, L]$ απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού (Α.Π.Δ.), $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$, $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \theta(x) \theta(L-x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Καταστάσεις υπέρθεσης τελεστή Χαμιλτονιανής, $\Psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$, με $c_n = (\psi_n(x), \Psi(x, t=0))$.

Για οποιονδήποτε τελεστή ($\hat{W}$), με $\hat{W} u_n = w_n u_n$, $\Psi(x, t) = \sum_n d_n(t) u_n$, $d_n = (u_n, \Psi(x, t))$ και $\langle \hat{W} \rangle(t) = \sum_n |d_n(t)|^2 w_n$.

Σύστημα δύο ενεργειακών καταστάσεων, $\Psi(x, t) = |c_\alpha| e^{i\varphi_\alpha} e^{-iE_\alpha t/\hbar} \psi_\alpha(x) + |c_\beta| e^{-iE_\beta t/\hbar} \psi_\beta(x)$.

Μέση τιμή $\langle \hat{W} \rangle = |c_\alpha|^2 W_{\alpha\alpha} + |c_\beta|^2 W_{\beta\beta} + 2|c_\alpha||c_\beta| |W_{\beta\alpha}| \cos(\omega t + \varphi_\alpha + \delta_{\beta\alpha}^W)$, με $W_{\beta\alpha} \equiv (\psi_\beta, \hat{W} \psi_\alpha) = |W_{\beta\alpha}| e^{i\delta_{\beta\alpha}^W}$.

Με τα στοιχεία $W_{\beta\alpha}$ κάνουμε αναπαράσταση οποιουδήποτε τελεστή σε μορφή πίνακα.

Φορμαλισμός Dirac.

$\hat{H}|n\rangle = E_n |n\rangle$, $|\Psi(x, t)\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$, $c_n = \langle n | \Psi(x, t) \rangle$.

Αν $\hat{H} = \varepsilon(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + i\delta(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|) \Rightarrow$

$\hat{H}|1\rangle = \varepsilon|1\rangle - i\delta|2\rangle$ και $\hat{H}|2\rangle = \varepsilon|2\rangle + i\delta|1\rangle$

Ενώ υπό μορφή πίνακα με βάση τις ιδιοκαταστάσεις $|1\rangle, |2\rangle$ η Χαμιλτονιανή είναι $\begin{bmatrix} \varepsilon & i\delta \\ -i\delta & \varepsilon \end{bmatrix}$

Ιδιοσυναρτήσεις ορμής $\hat{p}\psi(x; p) = p\psi(x; p)$, $\psi(x; p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$, με $p \in (-\infty, \infty)$.

Σχέσεις ορθοκανονικότητας, $(\psi(x; p), \psi(x; p')) = \delta(p - p')$.

Πρόβλημα (συνεχών) ιδιοτιμών ενέργειας, $\hat{H}\psi(x; k) = E(k)\psi(x; k)$. Στο ελεύθερο σωματίο, ενέργεια και ορμή έχουν ίδιες ιδιοσυναρτήσεις.

Η υπέρθεση τους είναι τα κυματοπακέτα, $\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp c(p) \psi(x; p) e^{-iE(p)t/\hbar}$, με $c(p) = (\psi(x; p), \Psi(x, t=0))$.

Τριγωνομετρικές ταυτότητες, $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ και $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.