

ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ

Ολοκληρώματα Gauss, $I_{2n} = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots (2n-1)}{(2\lambda)^n} I_0$, όπου $I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$.

Εσωτερικό γινόμενο, $(\Psi(x), \Phi(x)) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \Phi(x) dx$.

Ιδιότητα, $(c_1 \Psi_1 + c_2 \Psi_2, d_1 \Phi_1 + d_2 \Phi_2) = c_1^* d_1 (\Psi_1, \Phi_1) + c_1^* d_2 (\Psi_1, \Phi_2) + c_2^* d_1 (\Psi_2, \Phi_1) + c_2^* d_2 (\Psi_2, \Phi_2)$

Συζυγής τελεστή, $(\hat{A}^+ \Psi, \Phi) \equiv (\Psi, \hat{A} \Phi)$. Ιδιότητες, $(\hat{A} + \hat{B})^+ = \hat{A}^+ + \hat{B}^+$ και $(\hat{A} \hat{B})^+ = \hat{B}^+ \hat{A}^+$.

Ερμητιανός τελεστής, $(\hat{A} \Psi, \Phi) \equiv (\Psi, \hat{A} \Phi)$. Μέση τιμή $\langle \hat{W} \rangle(t) = (\Psi(x, t), \hat{W} \Psi(x, t))$.

Μεταθέτης, $[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A} \hat{B} - \hat{B} \hat{A}$. Ιδιότητες, $[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}]$ και $[\hat{A}, \hat{B} \hat{C}] = \hat{B} [\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}] \hat{C}$.

Ισχύουν $[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar$ και $i\hbar \frac{d\langle \hat{W} \rangle(t)}{dt} = \langle [\hat{W}, \hat{H}] \rangle$ (απλή εφαρμογή $\frac{d\langle \hat{x} \rangle(t)}{dt} = \langle \hat{p}_x \rangle$).

Σχέσεις αβεβαιότητας, $(\Delta \hat{A})(\Delta \hat{B}) \geq \frac{1}{2} |\langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle|$.

Χρονοεξαρτώμενη εξίσωση Schrödinger $\hat{H} \Psi(x, t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x, t)}{\partial t}$. Τελεστής $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$

Χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger ή πρόβλημα (διακριτών) ιδιοτιμών ενέργειας, $\hat{H} \psi_n(x) = E_n \psi_n(x)$.

Σχέσεις ορθοκανονικότητας, $(\psi_n(x), \psi_m(x)) = \delta_{nm}$

$[0, L]$ απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού (Α.Π.Δ.), $E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} n^2$, $\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Theta(x) \Theta(L-x)$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Καταστάσεις υπέρθεσης τελεστή Χαμιλτονιανής, $\Psi(x, t) = \sum_n c_n \psi_n(x) e^{-iE_n t/\hbar}$, με $c_n = (\psi_n(x), \Psi(x, t=0))$.

Για οποιονδήποτε τελεστή ($\hat{W}$), με $\hat{W} u_n = w_n u_n$, $\Psi(x, t) = \sum_n d_n(t) u_n$, $d_n = (u_n, \Psi(x, t))$ και $\langle \hat{W} \rangle(t) = \sum_n |d_n(t)|^2 w_n$.

Σύστημα δύο ενεργειακών καταστάσεων, $\Psi(x, t) = |c_a| e^{i\varphi_{\alpha\beta}} e^{-iE_a t/\hbar} \psi_\alpha(x) + |c_\beta| e^{-iE_\beta t/\hbar} \psi_\beta(x)$.

Μέση τιμή $\langle \hat{W} \rangle = |c_a|^2 W_{\alpha\alpha} + |c_\beta|^2 W_{\beta\beta} + 2|c_a||c_\beta| |W_{\beta\alpha}| \cos(\omega t + \varphi_{\alpha\beta} + \delta_{\beta\alpha}^W)$, με $W_{\beta\alpha} \equiv (\psi_\beta, \hat{W} \psi_\alpha) = |W_{\beta\alpha}| e^{i\delta_{\beta\alpha}^W}$.

Με τα στοιχεία $W_{\beta\alpha}$ κάνουμε αναπαράσταση οποιουδήποτε τελεστή σε μορφή πίνακα.

Φορμαλισμός Dirac.

$\hat{H}|n\rangle = E_n |n\rangle$, $|\Psi(x, t)\rangle = \sum_n c_n e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle$, $c_n = \langle n | \Psi(x, t) \rangle$.

Αν $\hat{H} = \varepsilon(|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|) + i\delta(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|) \Rightarrow$

$\hat{H}|1\rangle = \varepsilon|1\rangle - i\delta|2\rangle$ και $\hat{H}|2\rangle = \varepsilon|2\rangle + i\delta|1\rangle$

Ενώ υπό μορφή πίνακα με βάση τις ιδιοκαταστάσεις $|1\rangle, |2\rangle$ η Χαμιλτονιανή είναι $\begin{bmatrix} \varepsilon & i\delta \\ -i\delta & \varepsilon \end{bmatrix}$

Ιδιοσυναρτήσεις ορμής $\hat{p}\psi(x; p) = p\psi(x; p)$, $\psi(x; p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$, με $p \in (-\infty, \infty)$.

Σχέσεις ορθοκανονικότητας, $(\psi(x; p), \psi(x; p')) = \delta(p - p')$.

Πρόβλημα (συνεχών) ιδιοτιμών ενέργειας, $\hat{H}\psi(x; k) = E(k)\psi(x; k)$. Στο ελεύθερο σωματίο, ενέργεια και ορμή έχουν ίδιες ιδιοσυναρτήσεις.

Η υπέρθεση τους είναι τα κυματοπακέτα, $\Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dp c(p) \psi(x; p) e^{-iE(p)t/\hbar}$, με $c(p) = (\psi(x; p), \Psi(x, t=0))$.

Τριγωνομετρικές ταυτότητες, $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$ και $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta)$.

Τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού, εύρους $2L$ και βάθους V_0 , $\cos(\theta) = \frac{\theta}{\lambda} + \frac{n\pi}{2\lambda}$, με $\lambda = L \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$.

Ασυνέχεια παραγώγου κυματοσυνάρτησης σε δυναμικό $V(x) = \pm g \delta(x - x_0)$, $\frac{d\Psi(x=x_0^+)}{dx} - \frac{d\Psi(x=x_0^-)}{dx} = \pm \frac{2mg}{\hbar^2} \Psi(x = x_0)$.

Ορθογώνιο φράγμα, εύρους L και ύψους V_0 , με $E > V_0$ $R = \frac{(U_0 \sin k' L)^2}{(U_0 \sin k' L)^2 + (2kk')^2}$, με $U_0 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}$, $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ και $k'^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$

Στον Κ.Α.Τ., Φ.Σ.Μ. με $E_0 = \hbar\omega$ και $x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$. $\psi_0 = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{(1/4)} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $\psi_1 = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{(1/4)} x e^{-\frac{x^2}{2}}$ και $\psi_2 = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^{(1/4)} (2x^2 - 1) e^{-\frac{x^2}{2}}$.

Τελεστές $\hat{\alpha} = \frac{\hat{x} + i\hat{p}}{\sqrt{2}}$, $\hat{\alpha}^\dagger = \frac{\hat{x} - i\hat{p}}{\sqrt{2}}$. $\hat{\alpha}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$, $\hat{\alpha}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

Αλγεβρική θεωρία στροφορμής (Φ.Σ.Μ, $\hbar = 1$), $l_\pm \equiv l_x \pm il_y$, $l_z|l, m\rangle = m|l, m\rangle$, $l^2|l, m\rangle = l(l+1)|l, m\rangle$ και

$l_\pm|l, m\rangle = \sqrt{l(l+1) - m(m \pm 1)}|l, m \pm 1\rangle$.

Άτομο υδρογόνου, Φ.Σ.Μ., κυματοσυνάρτηση, $\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = N_{nlm} r^l e^{-r/n} L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right) Y_{lm}(\theta, \varphi)$, με $L_K^N(w) = \frac{d^N}{dw^N} L_K(w)$,

$L_K(w) = e^w \frac{d^K}{dw^K} (w^K e^{-w})$, $Y_{lm}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-m)!}{(l+m)!}} P_{lm}(\theta) e^{im\varphi}$, $P_{lm}(x) = (-1)^m (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{dx^m} P_l(x)$, $P_l(x) = \frac{1}{l! 2^l} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l$.

Ισχύει $\int_0^\infty r^n e^{-\lambda r} dr = \frac{n!}{\lambda^{n+1}}$.

Χρήσιμες φυσικές σταθερές, $\hbar \sim 10^{-34} Js$, $m \sim 10^{-30} kg$ και $e = 1.6 \times 10^{-19} C$.