

Μάθημα 20^ο, 26 Νοεμβρίου 2008 (9:00-10:00).

Έχω τη μέση τιμή του A, $\langle A \rangle$. Πόση είναι η χρονική παράγωγος της $\langle A \rangle$;

- Το \hat{A} δεν εξαρτάται από τον χρόνο.

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{d}{dt} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* (\hat{A} \Psi) dx \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^* (\hat{A} \Psi) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{A} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) dx \quad (1)$$

Εξίσωση Schrödinger

$$\left. \begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} &= H\Psi \\ i^* \hbar \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^* &= (H\Psi)^* = -i\hbar \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^* = (H\Psi)^* \end{aligned} \right\} \rightarrow \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)^* = \frac{1}{i\hbar} \hat{H} \Psi^*$$

$$\text{Άρα (1)} \Rightarrow -\frac{1}{i\hbar} \int (H\Psi)^* A\Psi dx + \frac{1}{i\hbar} \int \Psi^* \hat{A} \hat{H} \Psi dx \quad (2)$$

Αλλά από ιδιότητα ερμιτιανότητας:

$$\int (B\Psi)^* \Psi dx = \int \Psi^* B\Psi$$

$$\begin{aligned} \text{Άρα (2)} \Rightarrow & \frac{1}{i\hbar} \int \Psi^* (-\hat{H} \hat{A} \Psi) + \frac{1}{i\hbar} \int \Psi^* \hat{A} \hat{H} \Psi dx = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* [\hat{A} \hat{H} - \hat{H} \hat{A}] \Psi dx = \\ & = \frac{1}{i\hbar} \int \Psi^* [\hat{A}, \hat{H}] \Psi dx = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle \end{aligned}$$

Άρα, για να βρω τη χρονική παράγωγο της μέσης τιμής του A, ισχύει:

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle$$

Εφαρμογή του παραπάνω τύπου για τελεστή θέσης και ορμής.

Η χαμιλτονιανή για μονοδιάστατο σύστημα είναι γενικά: $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$.

Θέλω τη χρονική εξάρτηση της μέσης θέσης x.

$$\frac{d}{dt} \langle x \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [x, H] \rangle \quad (1)$$

Άρα χρειάζεται να υπολογίσω το

$$[x, H] = \left[x, \frac{p^2}{2m} + V(x) \right] = \left[x, \frac{p^2}{2m} \right] + [x, V(x)] = \frac{1}{2m} [x, p^2] = \frac{1}{2m} 2i\hbar p = \frac{i\hbar}{m} p$$

$$\text{Άρα (1)} \Rightarrow \frac{1}{i\hbar} \langle i\hbar \frac{p}{m} \rangle = \frac{i\hbar}{i\hbar m} \langle p \rangle$$

$$\text{Άρα } \boxed{\frac{d \langle x \rangle}{dt} = \frac{\langle P \rangle}{m}}.$$

Η σχέση μεταξύ μέσης τιμής της θέσης και της ορμής, είναι πανομοιότυπη με την κλασική έκφραση, $v = \frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}$.

Συσχέτιση θέσης και ορμής (μέση τιμή)

$$\frac{d \langle x \rangle}{dt} = \frac{\langle p \rangle}{m}$$

Ανάλογα εκτιμούμε την χρονική μεταβολή της ορμής

Συσχέτιση ορμής και δύναμης (μέση τιμή)

$$\frac{d \langle p \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [p, H] \rangle \quad (1)$$

$$[p, H] = \left[p, \frac{p^2}{2m} + V(x) \right] = \left[p, \frac{p^2}{2m} \right] + [p, V(x)]$$

$$[p, V(x)] = -i\hbar \frac{\partial V(x)}{\partial x}$$

$$(1) \Rightarrow -\frac{i\hbar}{i\hbar} \left\langle \frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\rangle = \left\langle -\frac{\partial V(x)}{\partial x} \right\rangle$$

Μέση δύναμη

Άρα πάλι κατέληξα σε κλασική έκφραση (2^ο νόμο Newton), για τις μέσες τιμές.

ΜΕΓΕΘΗ ΠΟΥ ΔΙΑΤΗΡΟΥΝΤΑΙ

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = 0 \Rightarrow \frac{1}{i\hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}] \rangle = 0 \Rightarrow [\hat{A}, \hat{H}] = 0$$

ΑΡΤΙΟΤΗΤΑ, ή ΙΣΟΤΙΜΙΑ (PARITY).

$$P\psi(x) \equiv \psi(-x)$$

Ιδιοτιμές, ιδιοσυναρτήσεις

$$P\psi(x) = \xi\psi(x) \Rightarrow P^2\psi(x) = PP\psi(x) = P\xi\psi(x) = \xi P\psi(x) = \xi^2\psi(x),$$

ενώ

$$P^2\psi(x) = PP\psi(x) = P\psi(-x) = \psi(-(-x)) = \psi(x), \text{ δηλαδή } \xi^2 = 1 \Rightarrow \xi = \pm 1$$

Άρα, ιδιοτιμές οι ± 1 , και καθώς

$$P\psi(x) = \pm\psi(x) \Rightarrow \psi(-x) = P\psi(x) = \psi(-x) \Rightarrow \psi(-x) = \psi(-x), \text{ οι}$$

ιδιοσυναρτήσεις είναι για ιδιοτιμή $+1$ οι άρτιες συναρτήσεις και για -1 οι περιττές.

ΔΙΑΤΗΡΗΣΗ ΑΡΤΙΟΤΗΤΑΣ

$$\begin{aligned} [P, \hat{H}]\psi(x) = 0 &\Rightarrow [P, -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)]\psi(x) = P \left(\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \right) + PV(x)\psi(x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} P\psi(x) - V(x)P\psi(x) = \\ \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(-x)}{d(-x)^2} + V(-x)\psi(-x) - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(-x)}{dx^2} - V(x)\psi(-x) &= \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(-x)}{dx^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(-x)}{dx^2} + (V(-x) - V(x))\psi(-x) = \\ \Rightarrow V(x) &= V(-x) \end{aligned}$$

ΠΡΕΠΕΙ ΤΟ ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ