

Μάθημα 13^ο, 30 Οκτωβρίου 2008 (9:00-11:00).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΜΕ ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΑΡΧΕΣ ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Άσκηση 9

Έστω ένα κβαντικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από τρεις ενεργειακές καταστάσεις (ιδιοτιμές ενέργειας του προβλήματος ιδιοτιμών $\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$), E_1 , E_2 και E_3 .

Αν γνωρίζουμε ότι η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την χρονική στιγμή $t=0$,

$$\text{είναι } \psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_3(x).$$

Να βρεθούν (α) η κυματοσυνάρτηση του συστήματος κάθε χρονική στιγμή, (β) οι πιθανότητες κατάληψης κάθε ενεργειακής στάθμης κάθε χρονική στιγμή, (γ) η μέση ενέργεια και (δ) η αβεβαιότητα της ενέργειας κάθε χρονική στιγμή.

Λύση

Η κυματοσυνάρτηση δίνεται από την έκφραση $\psi(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(x) e^{-i\frac{E_n t}{\hbar}}$ (1).

Εδώ πού έχουμε τρεις καταστάσεις,

$$\psi(x, t) = C_1 \psi_1(x) e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + C_2 \psi_2(x) e^{-i\frac{E_2 t}{\hbar}} + C_3 \psi_3(x) e^{-i\frac{E_3 t}{\hbar}} \quad (1').$$

Την χρονική στιγμή $t=0$, αυτή γίνεται $\psi(x, t=0) = C_1 \psi_1(x) + C_2 \psi_2(x) + C_3 \psi_3(x)$, καθώς οι εκθέτες στα εκθετικά μηδενίζονται. Έτσι από την σύγκριση της δεδομένης κυματοσυνάρτησης με την $\psi(x, t=0) = C_1 \psi_1(x) + C_2 \psi_2(x) + C_3 \psi_3(x)$, καταλαβαίνουμε ότι $C_1 = 1/\sqrt{2}$, $C_2 = 0$, $C_3 = 1/\sqrt{2}$.

Οι συντελεστές μπορούν να εκτιμηθούν και από την σχέση

$$C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \psi(x, t=0) dx \Rightarrow C_n = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \left[\frac{\psi_1 + \psi_3}{\sqrt{2}} \right] dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n^* \psi_1 + \psi_n^* \psi_3) dx = \frac{\delta_{n1} + \delta_{n3}}{\sqrt{2}},$$

καθώς (ακολουθεί η απόδειξη)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x) \psi(x, t=0) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x) \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \int_{-\infty}^{\infty} \psi_m^*(x) \psi_n(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \delta_{nm} = C_m.$$

(α) Έτσι από την (1'), βρίσκουμε ότι η κυματοσυνάρτηση είναι

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) e^{-i\frac{E_1 t}{\hbar}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_3(x) e^{-i\frac{E_3 t}{\hbar}}$$

(β) Έτσι οι αντίστοιχες πιθανότητες, οποιαδήποτε χρονική στιγμή, είναι

$$P_1(t) = |C_1 e^{-iE_1 t/\hbar}|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ η πιθανότητα να έχω κατάσταση με ενέργεια } E_1.$$

$$P_2 = |C_2 e^{-iE_2 t/\hbar}|^2 = 0^2 = 0, \text{ η πιθανότητα να έχω κατάσταση με ενέργεια } E_2.$$

$$P_3 = |C_3 e^{-iE_3 t/\hbar}|^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}, \text{ η πιθανότητα να έχω κατάσταση με ενέργεια } E_3.$$

(γ) Όλες οι πιθανότητες είναι χρονοανεξάρτητες (το κβαντικό σύστημα είναι απομονωμένο) και προφανώς $\langle E \rangle = \langle E \rangle_{t=0} = P_1 E_1 + P_3 E_3 = \frac{1}{2} E_1 + \frac{1}{2} E_3 = \frac{E_1 + E_3}{2}.$

Το ίδιο αποτέλεσμα θα βρίσκουμε και από την σχέση $\langle E \rangle = \sum_{n,m} c_n^* c_m e^{i(E_n - E_m)t/\hbar} H_{nm},$

$$\text{όπου } H_{nm} = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) \hat{H} \psi_m(x) dx = E_n \delta_{nm}.$$

(δ) Προφανώς $\langle E^2 \rangle = P_1 E_1^2 + P_3 E_3^2 = \frac{1}{2} E_1^2 + \frac{1}{2} E_3^2 = \frac{E_1^2 + E_3^2}{2},$ και η αβεβαιότητα στην ενέργεια δίνεται από την σχέση

$$\Delta E = \left[\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2 \right]^{1/2} = \left[\frac{E_1^2 + E_3^2}{2} - \left(\frac{E_1 + E_3}{2} \right)^2 \right]^{1/2} = \left| \left(\frac{E_1 - E_3}{2} \right) \right|$$

Η ΙΔΙΑ ΑΣΚΗΣΗ ΘΑ ΜΠΟΡΟΥΣΕ ΝΑ ΕΙΧΕ ΔΙΑΤΥΠΩΘΕΙ ΩΣ,

«Αρχικά (t=0) το σύστημα βρίσκεται στην E_1 και E_3 ενεργειακές καταστάσεις με ίση πιθανότητα».

Ίση πιθανότητα σημαίνει $P_1 = P_3$ ενώ γνωρίζω ότι η συνολική πιθανότητα είναι μονάδα

$$(P_1 + P_3 = P_1 + P_1 = 2P_1 = 1), \text{ άρα } P_1 = P_3 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Έτσι έχουμε } |C_1|^2 = P_1 \Rightarrow C_1 = e^{i\varphi_1} \sqrt{P_1} = e^{i\varphi_1} / \sqrt{2} \text{ και ανάλογα } C_3 = e^{i\varphi_3} / \sqrt{2}.$$

ΚΑΘΩΣ ΔΕΝ ΕΧΟΥΜΕ ΑΛΛΕΣ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΑΣ, ΟΙ ΦΑΣΕΙΣ ΜΗΔΕΝΙΖΟΝΤΑΙ ($\varphi_1 = \varphi_3 = 0$) ΚΑΙ $C_1 = 1/\sqrt{2}, C_3 = 1/\sqrt{2}$

Άσκηση 10

Έστω ένα κβαντικό σύστημα το οποίο περιγράφεται από δυο ενεργειακές καταστάσεις (ιδιοτιμές ενέργειας του προβλήματος ιδιοτιμών $\hat{H}\psi_n(x) = E_n\psi_n(x)$), E_1 και E_2 . Το σύστημα αυτό ονομάζεται και σύστημα δύο επιπέδων.

Αν γνωρίζουμε ότι η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την χρονική στιγμή $t=0$,

$$\text{είναι } \psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x).$$

Να βρεθεί η μέση τιμή της θέσης.

Λύση

Η κυματοσυνάρτηση δίνεται προφανώς από την έκφραση

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x)e^{-i\frac{E_1}{\hbar}t} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x)e^{-i\frac{E_2}{\hbar}t}$$

Για την εύρεση της μέσης τιμής της θέσης χρησιμοποιούμε την σχέση που βρήκαμε στο ακριβώς προηγούμενο μάθημα

$$\langle A \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n^* C_m e^{i\frac{(E_n - E_m)t}{\hbar}} A_{nm}, \text{ όπου } A_{nm} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x) (\hat{A}\psi_m(x)) dx.$$

Εδώ ο τελεστής A είναι ο τελεστής της θέσης, ενώ το διπλό άθροισμα παίρνει τιμές $n=1,2$ και $m=1,2$.

Δηλαδή

$$\begin{aligned} \langle x \rangle &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} C_n^* C_m e^{i\frac{(E_n - E_m)t}{\hbar}} x_{nm} = C_1^* C_1 e^{i\frac{(E_1 - E_1)t}{\hbar}} x_{11} + C_1^* C_2 e^{i\frac{(E_1 - E_2)t}{\hbar}} x_{12} + C_2^* C_1 e^{i\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}} x_{21} + C_2^* C_2 e^{i\frac{(E_2 - E_2)t}{\hbar}} x_{22} = \\ &= C_1^* C_1 e^0 x_{11} + C_1^* C_2 e^{-i\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}} x_{12} + C_2^* C_1 e^{i\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}} x_{21} + C_2^* C_2 e^0 x_{22} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} x_{11} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}} x_{12} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}} x_{21} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} x_{22} = \\ &= \frac{1}{2} x_{11} + \frac{1}{2} e^{-i\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}} x_{12} + \frac{1}{2} e^{i\frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar}} x_{21} + \frac{1}{2} x_{22} \end{aligned}$$

$$\text{Καθώς } x_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_i^* x \psi_j dx$$

$$x_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* x \psi_1 dx, \quad x_{22} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^* x \psi_2 dx, \quad x_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* x \psi_2 dx.$$

$$\text{Ενώ } x_{21} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^* x \psi_1 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_2 x \psi_1^*)^* dx = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* x \psi_2 dx \right)^* = x_{12}^*$$

Οπότε θα έχω, $x_{21} = |x_{21}| e^{i\varphi}$, $x_{12} = x_{21}^* = |x_{21}| e^{-i\varphi}$ και

$$\langle x \rangle = \frac{1}{2} \left[x_{11} + x_{22} + |x_{21}| e^{-i\varphi} e^{\frac{i(E_2-E_1)t}{\hbar}} + |x_{21}| e^{i\varphi} e^{\frac{i(E_2-E_1)t}{\hbar}} \right] = \frac{1}{2} [x_{11} + x_{22}] + |x_{21}| \left[\frac{e^{i\left\{\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar} + \varphi\right\}} + e^{-i\left\{\frac{(E_2-E_1)t}{\hbar} + \varphi\right\}}}{2} \right] =$$

$$= \frac{1}{2} [x_{11} + x_{22}] + |x_{21}| \cos \left\{ \frac{(E_2 - E_1)t}{\hbar} + \varphi \right\}$$

Παρατηρούμε ότι το $\langle x \rangle$ αλλάζει με τον χρόνο η $\langle E \rangle$ δεν αλλάζει με τον χρόνο. Η ταλάντωση της μέσης θέσης εξαρτάται από την διαφορά ενεργειών (περίοδος ταλάντωσης $T = \hbar / (E_2 - E_1)$).

Επιπλέον ερώτημα, πόση είναι η μέση θέση αν $\psi_1(x)$ είναι πραγματική και περιττή και $\psi_2(x) = \psi_1(x) - \psi_1^3(x)$.

Προφανώς, $x_{11} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* x \psi_1 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_1)^2 x dx = 0$, καθώς $(\psi_1)^2$ άρτια και $x(\psi_1)^2$

περιττή. Ανάλογα $x_{22} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_2^* x \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (\psi_2)^2 x dx = 0$, για τους ίδιους λόγους (αν

$\psi_1(x)$ τότε $\psi_2(x) = \psi_1(x) - \psi_1^3(x)$ περιττή). Ενώ τέλος

$x_{12} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1^* x \psi_2 dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi_1 \psi_2 dx = 0$, καθώς $\psi_1 \psi_2$ άρτια και $x \psi_1 \psi_2$ περιττή.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΗΤΙ

(Α) Να λυθεί η Άσκηση 10, θεωρώντας ότι το κβαντικό σύστημα είναι ένα απειρόβαθο πηγάδι πάχους L .

(Β) Αν η αρχική κυματοσυνάρτηση έχει την μορφή

$$\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) + \frac{i}{\sqrt{2}} \psi_2(x), \text{ είναι η μέση τιμή της θέσης ίδια;}$$

Φυσική σημασία

$$\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2(x)$$

Ποια η φυσική σημασία του γραμμικού συνδυασμού καταστάσεων. Αφού τα κβαντικά συστήματα χαρακτηρίζονται από τις ιδιοτιμές των ιδιοκαταστάσεων τους (π.χ. ένα κβαντικό σύστημα θα βρίσκεται ή στην E_1 ή στην E_2 κτλ

ενεργειακή κατάσταση, ΠΟΤΕ ΣΕ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΣΥΝΔΥΑΣΜΟ!). Ο γραμμικός

συνδυασμός στην $\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x)$, έχει προέρθει ως εξής.

Προετοιμάζουμε «άπειρα» κβαντικά συστήματα με τον ίδιο ακριβώς τρόπο (είναι δηλαδή όλα ίδια). Κάνουμε μετρήσεις σε αυτά και τα αποτελέσματα δίνουν 50% την μία ιδιοτιμή και 50% την άλλη ιδιοτιμή (δηλαδή σε αυτά τα συστήματα θα βρω τα μισά να είναι στην E_1 και τα άλλα μισά στην E_2).

Πως ξεχωρίζω όμως την $\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2(x)$ από την

$$\psi(x, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_2(x).$$