

ΙΣΟΤΡΟΠΟΣ ΑΡΜΟΝΙΚΟΣ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗΣ ΣΕ ΔΥΟ ΔΙΑΣΤΑΣΕΙΣ

$$V(x,y) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x^2 + y^2) = V_x(x) + V_y(y) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2$$

$$\text{Εξισώσεις Schrödinger: } -\frac{\hbar^2}{2m} X'' + \frac{1}{2} m \omega^2 X = E_x X \quad \text{και} \quad -\frac{\hbar^2}{2m} Y'' + \frac{1}{2} m \omega^2 Y = E_y Y$$

Διηλεκτρί έχουμε δύο μονοδιάστατους αρμονικούς ταλαντωτές, με ίδια ιδιοσυχνότητα

Μπορούμε να δουλέψουμε στο φυσικό σύστημα μονάδων με τα εξής αποτελέσματα,  $X(x) = N_{1x} e^{-x^2/2} H_{1x}(x)$  και  $E_{1x} = (n_x + \frac{1}{2})$

$$Y(y) = N_{1y} e^{-y^2/2} H_{1y}(y) \quad \text{και} \quad E_{1y} = (n_y + \frac{1}{2})$$

σταθερές κανονικοποιήσεις, πολυώνυμα Hermite

$$\text{Οπότε } \Psi(x,y) = N_{1x} N_{1y} e^{-(x^2+y^2)/2} H_{1x}(x) H_{1y}(y) \quad \text{καθώς } \Psi(x,y) = X \cdot Y \quad \text{και}$$

$$E_{1x}, n_y = E_x + E_y = n_x + n_y + 1 \quad n_x, n_y = 0, 1, 2, \dots$$

Προφανώς στον ισότροπο αρμονικό ταλαντωτή έχουμε εκφυλισμένες καταστάσεις, π.χ. για  $(n_x=0, n_y=1)$  και  $(n_x=1, n_y=0)$ .

ΑΝΙΣΟΤΡΟΠΟΣ 2D Α.Τ.

$$V(x,y) = \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 \quad (\omega_x \neq \omega_y)$$

Προφανώς η μεθοδολογία είναι ανάλογη του ισότροπου. Η βασική διαφορά εδώ είναι ότι δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το φυσικό σύστημα μονάδων καθώς σε αυτή όλη οι φυσικές σταθερές είναι ίσες με μονάδα και άρα  $\omega_x = \omega_y$  που δεν ισχύει.

Ετσι στα τελικά αποτελέσματα μας για τις ιδιοσυχνότητες έχουμε,

$$\Psi(x,y) = N_{1x} N_{1y} e^{-(\frac{x}{x_0})^2/2} e^{-(\frac{y}{y_0})^2/2} H_{1x}(\frac{x}{x_0}) H_{1y}(\frac{y}{y_0}) \quad n_x, n_y = 0, 1, \dots$$

$$\text{και} \quad E_{n_x, n_y} = (n_x + \frac{1}{2}) \hbar \omega_x + (n_y + \frac{1}{2}) \hbar \omega_y$$

$$\text{και } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_x}} \quad y_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_y}}$$

Ανάλογα για 3D ΙΣΟΤΡΟΠΟ,  $E = n_x + n_y + n_z + \frac{3}{2} \quad n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, \dots$

$$\text{και } \Psi(x,y,z) = N_{1x} N_{1y} N_{1z} e^{-(x^2+y^2+z^2)/2} H_{1x}(x) H_{1y}(y) H_{1z}(z)$$

Ενώ στον ανισότροπο πρέπει να είμαστε προσεκτικοί και να μην χρησιμοποιήσουμε το φυσικό σύστημα μονάδων.

**Παρατηρήσεις.** - Ο τριδιάστατος ισότροπος Α.Τ. είναι η γενίκευση του μονοδιάστατου σε τρεις διαστάσεις. Δηλαδή δύναμη ελαστικού  $\vec{F} = -k \vec{r}$  ( $\vec{r}$ , διάνυσμα μετατόμισης από θέση ισορροπίας)  $\Rightarrow V = \frac{1}{2} k r^2 = \frac{1}{2} k (x^2 + y^2 + z^2)$ .

~~Ε~~ Ο μονοδιάστατος Α.Τ. αποτελεί πολύ ικανοποιητική προσέγγιση οποιουδήποτε μονοδιάστατου δυναμικού με ελάχιστο σε θέση  $x=0$

$$\text{καθώς } V(x) = V(0) + \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_{x=0} x + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_{x=0} x^2 + \dots \rightarrow \text{"παιγνι" ρόλο μω}$$

$\rightarrow$  ο (δύναμη μηδέν στη θέση ισορροπίας, ελακίστου)

Δεν είναι προφανές η αναλογία σε 2 και 3 διαστάσεις.

π.χ. για  $V(x,y)$  με ελάχιστο στο  $x=0, y=0$  έχουμε

$$V(x,y) = V(0,0) + \frac{\partial V}{\partial x} \Big|_0 x + \frac{\partial V}{\partial y} \Big|_0 y + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \Big|_0 x^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \Big|_0 y^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \Big|_0 xy + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} \Big|_0 yx$$

Εκω Α.Τ. μόν. άου  
 $\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \Big|_0 = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 6

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυχνότητες ενέργειας του 2D δυναμικού  $V(x,y) = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x + \frac{1}{2} m \omega^2 y^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 y$

Υπόδειξη: Έχουμε Α.Τ. με μετατολισμένο ελάχιστο.....



ΑΣΚΗΣΗ 7 Ισότροπος Α.Τ. Δύο διαστάσεων βρίσκεται του  $t=0$  σε κατάσταση που αντιστοιχεί σε ισοπλάση 'κατάληψη' των καταστάσεων  $(u_x, u_y) = (1, 0)$  και  $(0, 1)$  (αποκλειστικά αυτών των δύο). Να βρεθεί (α) Η  $\Psi(x, y, t)$  στα πλαίσια του πολυομιτού φημαλισμού (Hermite). (β) Τα  $\langle \vec{r} \rangle$ ,  $\langle \vec{p} \rangle$  και  $\langle v^2 \rangle$  χρησιμοποιώντας τον φημαλισμό Δίνως.

(α) Ισοπλάσιες καταστάσεις σημαίνει  $P_1 = P_2 = \frac{1}{2} \rightarrow c_1 = c_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$  (απουσία αόριστη) (ημυποριών)

$$\text{αρα } \Psi(x, y, t=0) = \frac{1}{\sqrt{2}} N_0 N_1 e^{-x^2/2} H_1(x) e^{-y^2/2} H_0(y) + \frac{1}{\sqrt{2}} N_0 N_1 e^{-x^2/2} H_0(x) e^{-y^2/2} H_1(y) = \frac{N_0 N_1}{\sqrt{2}} e^{-(x^2+y^2)/2} (x+y)$$

$$\text{Έτσι } \Psi(x, y, t) = \frac{N_0 N_1}{\sqrt{2}} e^{-(x^2+y^2)/2} (x+y) e^{-iEt} \quad (\text{καθώς } E_{0,1} = E_{1,0} = 2), \text{ δηλαδή πρακτικώς χρονοανεξάρτητη (στάσιμη) κατάσταση, αφ'ότι } \Psi^*(t)\Psi(t) = \frac{N_0^2 N_1^2}{2} e^{-(x^2+y^2)} (x+y)^2$$

Ποια σημαντική διαφορά παρατηρείται σε σχέση με τις μονοδιάστατες στάσιμες καταστάσεις; Ποιό ρόλο παίζει ο εκφυλισμός;

(β)  $\langle \vec{r} \rangle = \langle \Psi | \vec{r} | \Psi \rangle = \langle \Psi | x\hat{x} + y\hat{y} | \Psi \rangle = \langle \Psi | x | \Psi \rangle \hat{x} + \langle \Psi | y | \Psi \rangle \hat{y}$   
 Τώρα  $|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle_x |0\rangle_y + \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle_x |1\rangle_y$ ,  $\langle \Psi | = \frac{1}{\sqrt{2}} (\langle 1 |_x \langle 0 |_y + \langle 0 |_x \langle 1 |_y)$ ,  $x = \frac{a_x + a_x^\dagger}{\sqrt{2}}$

$$\text{Αρα } \langle \Psi | x | \Psi \rangle = \frac{1}{2} (\langle 1 |_x \langle 0 |_y) (a_x^\dagger + a_x) (|0\rangle_x |1\rangle_y) + \frac{1}{2} (\langle 1 |_x \langle 0 |_y) (\frac{a_x^\dagger + a_x}{\sqrt{2}}) (|1\rangle_x |0\rangle_y) + \dots \Rightarrow$$

$$2\sqrt{2} \langle x \rangle = \langle 1 |_x \langle 0 |_y a_x^\dagger |1\rangle_x |0\rangle_y \sqrt{2} + \langle 1 |_x \langle 0 |_y a_x |1\rangle_x |0\rangle_y + \langle 1 |_x \langle 0 |_y a_x^\dagger |0\rangle_x |1\rangle_y + \langle 1 |_x \langle 0 |_y a_x |0\rangle_x |1\rangle_y + \dots$$

$$= \langle 1 |_x \sqrt{2} |2\rangle_x \langle 0 |_y |0\rangle_y + \langle 1 |_x |0\rangle_x \langle 0 |_y |0\rangle_y + \langle 1 |_x |1\rangle_x \langle 0 |_y |1\rangle_y + 0 (a_x |0\rangle_x = 0) + \dots$$

$$\langle 0 |_x | \sqrt{2} |2\rangle_x \langle 1 |_y |0\rangle_y + \langle 0 |_x |0\rangle_x \langle 1 |_y |0\rangle_y + \langle 0 |_x |1\rangle_x \langle 1 |_y |1\rangle_y + 0 = 0 \quad (\text{ορθογωνιότητα})$$

Επιβεβαιώστε το ίδιο αποτέλεσμα με την μεθοδολογία μέσω ολοκληρωμάτων, δηλαδή  $\langle x \rangle = \int \Psi^* x \Psi dx dy = \dots = 0$  (ομοτέλεση περιττών συναρτήσεων).

Ανάλογες πράξεις για  $\langle v^2 \rangle$  και  $\langle \vec{p} \rangle$ . Το  $\langle \vec{p} \rangle$  μπορεί να υπολογιστεί και με την βοήθεια των θεωρημάτων Ehrenfest (Τσάβου, χυδαίστε το).

### ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΑΡΜΟΝΙΚΟΥ ΤΑΛΑΝΤΩΤΗ ΚΑΙ ΝΑΝΟΔΟΜΕΣ

Ισότροπος ή ανισότροπος αρμονικός ταλαντωτής σε τρεις διαστάσεις μπορεί να 'προσομοιωθεί' βαντική τζελία (περιορισμός σε τρεις διαστάσεις).

Διδακτικός αρμονικός ταλαντωτής και ελεύθερο σωματίδιο στην τρίτη διάσταση 'προσομοιώνει' βαντικό σύρμα.

Σε προηγούμενο μάθημα χρησιμοποιήσαμε απειρόβαθο πυχαδι δύναμικού για να περιγράψουμε τους περιορισμούς. Αλλά είναι η πιο 'σωστή' επιλογή Α.Τ. ή κτηρύδαο μας το υποδείκνυα (συνήθως) το πηγάκι.

ΑΣΚΗΣΗ 8. Να βρεθούν οι ιδιοκαταστάσεις ενέργειας δυναμικού  $V(x, y) = \frac{1}{2} m \omega^2 (x+y)^2$

Το  $V(x, y) \neq V_x + V_y$ . Αλλά με τα βήματα.  $u = (x+y)/\sqrt{2}$  και  $w = (x-y)/\sqrt{2}$ .

$$\text{Έτσι } \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial w}) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{1}{2} (\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} + \frac{\partial^2}{\partial w \partial u} + \frac{\partial^2}{\partial u \partial w}) \text{ και ανάλογα}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \dots = \frac{1}{\sqrt{2}} (\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial w}) \rightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \frac{1}{2} (\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial w^2} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial w} - \frac{\partial^2}{\partial w \partial u})$$

Η εξίσωση του Schrödinger γίνεται:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \Psi + \frac{1}{2} m \omega^2 (x+y)^2 \Psi = E \Psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} (\frac{\partial^2 \Psi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial w^2}) + \frac{1}{2} m \omega^2 u^2 = E \Psi(u, w)$$

Τώρα το δύναμικό  $V(u, w) = \frac{1}{2} m \omega^2 u^2 = \frac{1}{2} m \omega^2 u^2 + 0 = V_u + V_w$  (χωρίζουμε), άρα έχω ουσιαστικά στην  $u$ -διάσταση αρμονικό ταλαντωτή και ελεύθερο σωματίδιο στην  $w$ -διάσταση.

$$\text{Οπότε η κυματοσυνάρτηση είναι } \Psi(x, y) = \Psi(u, w) = N u u e^{-(u/u_0)^2/2} H_n(u/u_0) e^{i k w} e^{i k w}$$

$$\rightarrow \Psi(x, y) = N u u e^{-\frac{1}{2} \frac{m \omega^2}{\hbar^2} (x+y)^2} H_n(u/u_0) e^{i k w (x-y)/\sqrt{2}}$$

$$\text{με } u_0 = \sqrt{\hbar/m\omega}, u_n = 0, 1, 2, \dots, k w \in \mathbb{R} \text{ (αόριστη)}$$

$$\text{και ενέργεια } E = E_u + E_w = \hbar \omega (n_u + \frac{1}{2}) + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$$

Ο μετασχηματισμός συντεταγμένων είναι ουσιαστικά για στροφή 45°.

$$\begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & \sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Έχουμε δηλαδή ένα νέο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων.

... Από το ελεύθερο μάθημα πάρτε σε καθημερινότητα (μη κατασκευά) συστημά.