

## Μάθημα 5<sup>ο</sup>, 8 Οκτωβρίου 2008 (9:00-10:00).

### Άσκηση 4

Να περιγράψω την κίνηση ελεύθερου σωματιδίου σε τρεις διαστάσεις. Δηλαδή ποια είναι η εξίσωση Schrödinger;

### Λύση

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{\hat{p}_z^2}{2m} = \hat{E}$$

όπου

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$

$$p_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$$

$$p_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

Συνεπώς,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

[όπου  $\Psi = \Psi(x, y, z, t)$ ].

Η ισοδύναμη

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}$$

Ισοδύναμος τρόπος,

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \hat{x}p_x + \hat{y}p_y + \hat{z}p_z = \hat{x} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) + \hat{y} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) + \hat{z} \left( -i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) = \\ &= -i\hbar \left( \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} \right) = -i\hbar \vec{\nabla} \end{aligned}$$

$$\text{Και } E = \frac{p^2}{2m} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{p}}{2m} = \frac{(-i\hbar \vec{\nabla}) \cdot (-i\hbar \vec{\nabla})}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2$$

## ΦΥΣΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΚΥΜΑΤΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ.

(1926) Max Born, ΦΥΣΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ

Το σωματίο έχει καθορισμένη θέση, ενώ το κύμα βρίσκεται παντού στο χώρο. Αλλά το σωματίο συμπεριφέρεται και σαν κύμα.

Η κυματοσυνάρτηση είναι ΚΥΜΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ.

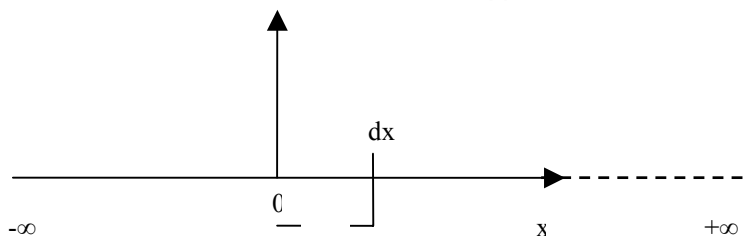
$\psi(x,t)$ , Ποια η φυσική σημασία της κυματοσυνάρτησης;

→ δίνει την πιθανότητα εύρεσης του σωματιδίου  $m$  στην θέση  $x$  έως  $x+dx$  για μια οποιαδήποτε χρονική στιγμή  $t$

$$P(x,t)dx \equiv \psi^*(x,t)\psi(x,t)dx = |\psi(x,t)|^2 dx$$

$$|\Psi(x,t)|^2 dx = P(x,t)dx$$

Η πιθανότητα εύρεσης του σωματιδίου ( $m$ ) στην περιοχή  $x \rightarrow x+dx$  σε δεδομένο χρόνο  $t$



Το  $\Psi_{(x,t)}$  είναι πλάτος κύματος πιθανότητας, δεν είναι υλικό κύμα!

→ Συνάρτηση που μπορώ να υπολογίζω σε  $\forall$  θέση στον  $x(\rightarrow x+dx)$  την πιθανότητα να είναι εκεί το σωματίο σε δεδομένη στιγμή  $t$ .

→ **Μιγαδική συνάρτηση**, άρα πρέπει να έχω το μέτρο της. Λόγω του ότι είναι μιγαδική συνάρτηση δεν μπορεί να έχει σχέση με την πιθανότητα, αντίθετα το πλάτος της  $|\Psi(x,t)|^2$  έχει σχέση με την πιθανότητα.

### Άσκηση 5

Ποιες από τις παρακάτω κυματοσυναρτήσεις περιγράφουν ένα πραγματικό φυσικό κβαντικό σύστημα;

- a)  $\Psi(x,t) = \sin kx$
- b)  $\Psi(x,t) = i \cos \omega t$
- c)  $\Psi(x,t) = i \sin kx \sin \omega t$
- d)  $\Psi(x,t) = e^{i\omega t} \sin kx$

### Λύση

- a) Η κυματοσυνάρτηση αυτή δεν περιγράφει ένα φυσικό σύστημα γιατί δεν είναι μιγαδική συνάρτηση, είναι πραγματική. Επομένως δεν αποτελεί λύση της εξ. Schrödinger. Είναι ένα σύστημα που δεν εξαρτάται από το χρόνο.

- b) Η κυματοσυνάρτηση αυτή δεν περιγράφει ένα φυσικό σύστημα γιατί είναι φανταστική συνάρτηση και επομένως δεν είναι λύση της εξίσωσης Schrödinger.  
Σε όλες τις θέσεις, η πιθανότητα να βρίσκεται εκεί το σωματίο είναι ίδια, για δεδομένη χρονική στιγμή.
- c) Η κυματοσυνάρτηση αυτή δεν περιγράφει ένα φυσικό σύστημα γιατί για κάποιες τιμές η τιμή της είναι 0 ( $\Psi(x,t) = 0$ , π.χ. για  $t=0$ , ή για  $t = 2\pi n / \omega$ , όπου το  $n$  ακέραιος)
- d) Η κυματοσυνάρτηση αυτή μπορεί να περιγράφει ένα φυσικό σύστημα γιατί είναι μιγαδική.  
Μόνο αυτή μπορεί να είναι λύση της εξ. Schrödinger.