

ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ ΠΡΟΙΔΡΑΧΗ ΑΣΤΕΡΟΥ ΤΟΥ Η.

Περιγραφή με την βοήθεια της Χαριτλουανής των δύο σωματιδίων, και την αρχή της αντιστοικίας (ορίες αντιστοικίζονται με σχεδόν οριζή)

$$H(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = H(x_{cm}, y_{cm}, z_{cm}, x, y, z) = \frac{p_{x,cm}^2 + p_{y,cm}^2 + p_{z,cm}^2}{2M} + \frac{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}{2m} + V(r) + \frac{1}{2} \omega^2 r^2$$

κουρδικό
ελληνικό
συντηρητικό ήλιο
του V.

Erkennung Schrödinger:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2M} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{cm}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_{cm}^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_{cm}^2} \right) - \frac{\hbar^2}{2\mu} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) + V(r) \right] \psi(\vec{r}, \vec{R}_{cm}) = E \psi(\vec{r}, \vec{R}_{cm})$$

Η συτήρηση του προδότη

1. 'Οπότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε

οφαιρικῇ συντεταγμένῃ.

 (r, θ, ϕ)
$$x = v \sin \theta \cos \phi$$
$$\gamma = \sqrt{5 \ln \theta \ln \phi}$$
$$z = v \cos \theta$$

Προφανώς όπως πράττειτε και στο παρελθόν, εφαρμόζουμε μέθοδο χωρίζων
μεταβλητών, δηλαδή $\psi(\vec{R}_{CM}, \vec{r}) = \psi_{CM}(\vec{R}_{CM}) \psi_{\vec{r}}(\vec{r})$ και παίρνουμε

$$\underbrace{\frac{1}{\psi_{cm}} \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{cm}^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_{cm}^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_{cm}^2} \right) \psi_{cm}(\vec{R}_{cm})}_{E_{cm}} - \underbrace{\frac{1}{\psi_r} \frac{1}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi_r(\vec{r})}_{E_{rs}} + V(r) = E$$

Απαθυσία

μE = E = E_{cm} + E_{sb}

Το μέλος αυτό αντιστοιχεί σε ελεύθερο
συντάκτο σε τρεις διαστάσεις, που
δουλεύει μελετητικό στο παρελθόν με
ιδιοσυμπεριφορές

$$\psi_{cm}(\vec{R}_{cm}) = e^{i(k_x x_{cm} + k_y y_{cm} + k_z z_{cm})} = e^{i\vec{k} \cdot \vec{R}_{cm}}$$

$$\text{KQ1} \quad E_{CM} = \frac{\hbar^2}{2M} (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$$

Κατακτά παλαιούς υπερταύς - εορταστές
και το θέλει είναι ιδιοκτήτης του \hat{p}

ΕΝΙΣΧΥΣΗ ΜΕΤΑΦΡΑΣΤΕ

Α αυτό το μέρος

Subsequent to this

54 x 10¹¹ 2007-2014

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$\tan \phi = \frac{y}{x}, \tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \chi}$$

... $kT\lambda$... $\left\{ \begin{array}{l} \text{αυτ' λογη ητ} \\ \text{ευν ηφθουδολοτ} \\ \text{οις αλλοιτ} \end{array} \right\}$

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r \psi_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi_r}{\partial \phi^2} \right] + V(r) \psi_r = E \psi_r$$

το ακτινικό αυτό κερράει
δράσεται πολύ γρήγορα και ως

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$$

Θεωρούμε λύσεις της μορφής

$$\psi_g(y) = R(g) \Theta(g) \phi(\phi) \text{ zur Darstellung}$$

$$\frac{1}{Rr} \frac{d^2}{dr^2} (rR) + \frac{1}{\Theta r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \frac{1}{\phi r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \phi}{d\phi^2} - \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} = -\frac{2\mu E_{\text{tot}}}{\hbar^2} \Rightarrow$$

$$\frac{r \sin^2 \theta}{R} \frac{d^2}{dr^2} (rR) + \sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\theta}{d\theta} \right) - \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} r^2 \sin^2 \theta + \frac{2\mu}{\hbar^2} E r^2 \sin^2 \theta = -\frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dr^2}$$

Οποιαδήποτε θα έχουμε το δεξιό σκέλος που είναι συνάρτηση μόνο το ϕ (στο μέτρο)
 $\rightarrow \phi'' + m^2 \phi = 0 \rightarrow \phi(\varphi) = e^{i m \varphi}$ Με ανάλογο 'λογική' με αυτή που έχουμε προπονήσει
 στις αλκίτες καταλαβαίνουμε ότι m είναι ακέραιος.

οὐκ ἔστι κατὰ τοὺς νόμους οὗτοι μὲν ἀκέραιος.

Διαιρούμε με $\sin^2 \theta$ και παίρνουμε την εξής εξίσωση:

$$\frac{r}{R} \frac{d^2(Rr)}{dr^2} + \frac{2\mu E}{\hbar^2} r^2 - \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} r^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin^2 \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} = 0$$

Οπότε καθε μέρους το εξισώνουμε με δύο αλγεβρικές σταθερές $(+\lambda, -\lambda)$
 Η εξίσωση για την $\Theta(\theta)$ συνάρτηση γίνεται

$$\frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{d}{d\theta} \left(\sin^2 \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \Theta = 0 \quad (A) \quad \text{και} \quad \frac{1}{Rr} \frac{d^2(Rr)}{dr^2} - \frac{2\mu V(r)}{\hbar^2} r^2 - \frac{\lambda}{r^2} = -\frac{2\mu E}{\hbar^2} \quad (B)$$

ή το ακαυτικό μέρος.

Επιπαρατηρούμε ότι στην $\Theta(\theta)$ συνάρτηση αλλάζοντας με $z = \cos \theta$ (πεδίο ορισμού $z \in [-1, 1]$) και η (A) γίνεται

$$\frac{d}{dz} \left((1-z^2) \frac{d\Theta}{dz} \right) + \left(\lambda - \frac{m^2}{1-z^2} \right) \Theta = 0 \quad (*) \quad \text{Η οποία είναι η συνάρτηση εξίσωση του Legendre.}$$

Αυτή είναι η εξίσωση γίνεται $\frac{d}{dz} \left((1-z^2) \frac{d\Theta}{dz} \right) + \lambda \Theta = (1-z^2) \Theta'' - 2z\Theta' + \lambda \Theta = 0$
 ή 'χυνωστή' εξίσωση Legendre.

Αναζητούμε πολυωνμικές λύσεις ή πιο γενικά απειροστές $\Theta(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$\text{καθώς} \quad \Theta'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^{n-2} = (\text{ορίζω } k=n-2) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} z^k$$

$$\text{και} \quad z^2 \Theta'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n z^n, \quad z\Theta' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^n \quad \text{καθώς την εξ. Legendre}$$

βρίσκω τον αναδρομικό τύπο της απειροστικής.

$$a_{n+2} = \left[\frac{n(n+1) - \lambda}{(n+2)(n+1)} \right] a_n$$

Έχω δηλαδή άπειρες ή περύτερες λύσεις
 άπειρες για πρώτο όρο (α...), περύτερες ή περύτε
 όρο το α...

καθώς το συνολικό $\Theta=0 \rightarrow z=1$ είναι ένα σημείο στο χώρο στο οποίο μπορεί να βρεθεί το ϵ , πρέπει και για $z=1$ να έχουμε λύση που να απαριθμείται.

Αυτή εξακολουθεί να είναι μόνο όταν η απειροστική τερματίζεται, το οποίο συμβαίνει όταν ο αριθμητής μηδενίζεται, δηλαδή $n(n+1) - \lambda = 0 \rightarrow \lambda = n(n+1)$

Οπότε η σταθερά λ είναι γενικά της μορφής $\ell(\ell+1)$ (όπου ℓ : ακέραιος)

και η λύση είναι πολυώνυμο βαθμού ℓ , τα χυνωστή πολυώνυμα Legendre

$\Theta(\theta) = P_\ell(z)$. Από τον αναδρομικό τύπο με $a_0 = a_1 = 1$ μπορούμε να βρούμε

τα P_ℓ , π.χ. $P_0 = 1, P_1 = z, P_2 = (3z^2 - 1)/2, P_3 = (5z^3 - 3z)/2 \dots$

Τα πολυώνυμα Legendre, δεν είναι κανονικοποιημένα, κανονικοποιημένα είναι τα $((2\ell+1)/2)^{1/2} P_\ell$, που αποτελούν μια ορθοκανονική βάση.

Η γενική περίπτωση με $m \neq 0$ (εξίσωση (A)) αποδεικνύεται ότι έχει λύση (μη μηδενική)

ανακατασκευάζει τη συνάρτηση συναρτήσεων Legendre, δηλαδή

$$P_\ell^m(z) = (1-z^2)^{m/2} \frac{d^m P_\ell(z)}{dz^m} \quad \text{προφανώς με τον περιορισμό } m \leq \ell$$

Γενικά η γενική εξάρτηση των κυματοσυναρτήσεων $\Theta(\theta)\Phi(\phi)$ είναι οι

$$\text{σφαίρικοι αρμονικοί} \quad Y_\ell^m(\theta, \phi) = \sqrt{\left(\frac{2\ell+1}{2}\right) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} (-1)^m P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi}$$

οι οποίες είναι ορθοκανονικές και αποτελούν μια βάση συναρτήσεων στην σφαίρα και επιφανεία.

Οποιαδήποτε συνάρτηση $f(\theta, \phi)$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των σφαίρικών αρμονικών, $f(\theta, \phi) = \sum_{\ell, m} c_{\ell, m} Y_\ell^m(\theta, \phi)$

Τα $c_{\ell, m}$ εκτιμώνται κάνοντας χρήση της ορθοκανονικότητας των Y_ℓ^m

$$\text{δηλαδή} \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi (Y_\ell^m(\theta, \phi))^* Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi \left(\frac{1}{2} (2\ell+1) \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} (-1)^m P_\ell^m(\cos \theta) e^{im\phi} \right)^* \left(\frac{1}{2} (2\ell'+1) \frac{(\ell'-m')!}{(\ell'+m')!} (-1)^{m'} P_{\ell'}^{m'}(\cos \theta) e^{im'\phi} \right) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$$

ή $\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta d\phi (Y_\ell^m(\theta, \phi))^* Y_{\ell'}^{m'}(\theta, \phi) = \delta_{\ell\ell'} \delta_{mm'}$