

Μάθημα 7^ο, 14 Οκτωβρίου 2008 (9:00-11:00).

Συνέχεια Άσκησης 6

Μέση τιμή τετραγώνου θέσης.

$$\langle x^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x, t)|^2 dx =$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \frac{1}{2\lambda} \sqrt{\frac{\lambda}{\pi}} = \frac{1}{2\lambda},$$

όπου για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\lambda x^2} dx$, χρησιμοποιήσαμε την

$$\text{σχέση } I_{2n} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n} e^{-\lambda x^2} dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{(2\lambda)^n} \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \text{ με } n=1, 2, 3, \dots \text{ και}$$

$$I_0 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 e^{-\lambda x^2} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\lambda x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}$$

ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΑ ΦΥΣΙΚΟΥ ΜΕΓΕΘΟΥΣ.

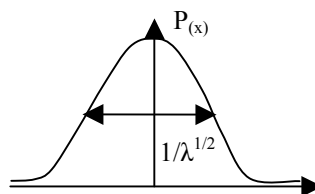
Έστω φυσικό μέγεθος A , το οποίο περιγράφεται από τον τελεστή \hat{A} . Ορίζεται ως **αβεβαιότητα (ή απροσδιοριστία)** του φυσικού μεγέθους (από τα μαθηματικά ονομάζεται διασπορά ή τυπική απόκλιση) η ποσότητα

$$\Delta A = \sqrt{\langle (A - \langle A \rangle)^2 \rangle} = \sqrt{\langle (A^2 - 2A\langle A \rangle + \langle A \rangle^2) \rangle} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - 2\langle A \rangle \langle A \rangle + \langle A \rangle^2} = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}.$$

Για το παραπάνω πρόβλημα η αβεβαιότητα της θέσης είναι

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2\lambda} - 0^2} = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}}.$$

ΠΡΑΓΜΑΤΙ, ΣΕ ΜΙΑ ΓΚΑΟΥΣΙΑΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗ (ΚΑΜΠΥΛΗ ΣΑΝ ΚΑΜΠΑΝΑ), ΤΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ ΜΑΣ, ΤΟ ΕΥΡΟΣ ΤΗΣ ΕΙΝΑΙ ΑΝΑΛΟΓΟ ΠΡΟΣ ΤΗΝ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΡΙΖΑ ΤΟΥ λ .



Η αβεβαιότητα, εκφράζει πόσο είναι διασκορπισμένο το σωματίο γύρω από την μέση τιμή (εδώ έχουμε μηδενική μέση θέση, καθώς έχουμε με ίση πιθανότητα θετικές και αρνητικές θέσεις του σωματίου).

ΓΕΝΙΚΕΥΣΗ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ ΓΙΑ ΟΠΟΙΟΔΗΠΟΤΕ ΦΥΣΙΚΟ ΜΕΓΕΘΟΣ.

Ο τύπος της μέσης τιμής για οποιαδήποτε φυσική ποσότητα που εξαρτάται από την θέση είναι

$$\langle f(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) |\psi(x, t)|^2 dx$$

που αποτελεί απλή γενίκευση του τύπου

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} x P(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x \psi^*(x, t) \psi(x, t) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x |\psi(x, t)|^2 dx.$$

Ο τύπος της μέσης τιμής για οποιαδήποτε φυσική ποσότητα που εξαρτάται από την θέση αλλά και από άλλες φυσικές ποσότητες (π.χ. ορμή) αναμένουμε να είναι

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) (\hat{A} \psi(x, t)) dx.$$

Έτσι η μέση ορμή θα είναι

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) (\hat{p} \psi(x, t)) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*(x, t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, t) \right) dx.$$

...Συνέχεια άσκησης 6

Να βρεθεί η αβεβαιότητα της ορμής.

$$\langle p \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\lambda x^2/2} \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \left(\left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\lambda x^2/2} \right) \right) dx = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{1/2} i\hbar \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\lambda x^2} dx = 0.$$

Ολοκλήρωμα σε όλο το πεδίο ορισμού περιττής συνάρτησης, γιαυτό και μηδενίζεται.

Ενώ

$$\langle p^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\lambda x^2/2} \left(-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^{1/4} e^{-\lambda x^2/2} \right) \right) dx = \dots = \frac{\hbar^2 \lambda}{2}.$$

$$\text{Και προφανώς } \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2} = \sqrt{\frac{\hbar^2 \lambda}{2}} = \hbar \sqrt{\frac{\lambda}{2}}.$$

ΔΟΚΙΜΑΣΤΕ ΚΑΙ ΤΗΝ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΣΧΕΣΗ (γιατί ισχύει):

$$\langle p^2 \rangle = \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} |d\psi(x)/dx|^2 dx = \dots = \frac{\hbar^2 \lambda}{2}$$

Ελέγχουμε την σχέση απροσδιοριστίας του Heisenberg ($\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$),

$$\Delta x \Delta p = \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \hbar \sqrt{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\hbar}{2}, \text{ που ισχύει.}$$

Άσκηση

Να δείξετε ότι $\langle p \rangle = 0$ αν

- a) $\Psi(x)$ πραγματική
- b) $\Psi(x)$ άρτια ή περιττή

Λύση

$$\begin{aligned}\langle p \rangle &= \int \Psi^*(x) \left[\hat{p} \Psi(x) \right] dx = \\ &= \int \Psi^*(x) \left[-i\hbar \frac{\partial \Psi(x)}{\partial x} \right] dx = \\ &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x) \frac{d\Psi(x)}{dx} dx\end{aligned}$$

[Έχουμε αντικαταστήσει όπου $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$]

- a) Αν $\Psi(x)$ πραγματική τότε

$$\begin{aligned}\langle p \rangle &= -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(x) \frac{d\Psi(x)}{dx} dx \\ &\stackrel{(*)}{=} -\frac{i\hbar}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\Psi^2}{dx} dx \\ &= -\frac{i\hbar}{2} [\Psi^2(\infty) - \Psi^2(-\infty)] \\ &= 0\end{aligned}$$

Καθώς η κυματοσυνάρτηση είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και μηδενίζεται στα ακραία σημεία του πεδίου ορισμού.

$$(*): \Psi \frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{2} \frac{d\Psi^2}{dx}$$

- b) Αν $\Psi(x)$ άρτια ($\Psi(-x) = \Psi(x)$), τότε $\frac{d\Psi}{dx}$ περιττή, ενώ αν $\Psi(x)$ περιττή ($\Psi(-x) = -\Psi(x)$), τότε $\frac{d\Psi}{dx}$ άρτια (γιατί;)

$$[\text{απόδειξη, } g(x) = \frac{d\Psi}{dx}, g(-x) = \frac{d\Psi(-x)}{d(-x)} = -\frac{d\Psi(x)}{dx} = -g(x)].$$

Οπότε $\langle p \rangle = 0$, γιατί το γινόμενο $\Psi^*(x) d\Psi(x)/dx$ είναι περιττή συνάρτηση.

Ανασκόπηση (μέχρι ώρας)

Βρισκόμαστε στην προσπάθειά μας να περιγράψουμε τα σωματίδια του μικρόκοσμου (π.χ. e , p και n). Να βρούμε την σωστή ‘μηχανική’ αυτών των μικροσκοπικών σωματιδίων. Της ‘μηχανικής’ αυτής της έχουμε δώσει και ένα όνομα, «Κβαντομηχανική».

Μέχρι ώρας έχουμε βρει ότι πολύ σημαντική συνάρτηση είναι η ΚΥΜΑΤΟΣΥΝΑΡΤΗΣΗ. Η συνάρτηση αυτή περιγράφει ένα σωματίδιο όταν αυτό βρίσκεται σε οποιοδήποτε δυναμικό. Για την μαθηματική μας ευκολία έχουμε περιοριστεί σε μονοδιάστατες περιπτώσεις (μονοδιάστατη κίνηση).

Η εξίσωση από την οποία μπορούμε να εκτιμήσουμε την κυματοσυνάρτηση, λύνοντάς την είναι η **εξίσωση Schrödinger**. Η εξίσωση αυτή ανακαλύφθηκε από τον νεαρό Schrödinger ως αποτέλεσμα της προσπάθειάς του να φτιάξει κοινή εννοιολογική γλώσσα μεταξύ της ‘κλασικής’ σωματιδιακής περιγραφής των σωματιδίων (ακόμα και του μικρόκοσμου) και της ιδέας του De Broglie ότι τα σωματίδια έχουν και κυματική φύση. Η εξίσωση αυτή είναι μια κυματική εξίσωση, από εκεί και ο όρος κυματοσυνάρτηση. Τα χρόνια έδειξαν (από την μελέτη σωρείας πειραμάτων) ότι η εξίσωση Schrödinger, η οποία ανακαλύφθηκε με αυτόν τον τρόπο (δηλαδή κάπως στα τυφλά και χωρίς βάσεις προσπάθεια), αποτελεί την εξίσωση που περιγράφει μια χαρά των μικρόκοσμο.

Ακόμα μάθαμε ότι η βασική φυσική της κυματοσυνάρτησης σχετίζεται με πιθανότητες. Η κυματοσυνάρτηση δεν είναι παρά ένα κύμα πιθανότητας. Το μέτρο της στο τετράγωνο (θυμίζουμε ότι η κυματοσυνάρτηση είναι πάντα μιγαδική), δεν μας δίνει παρά την πιθανότητα να βρίσκεται το αντίστοιχο σωματίδιο που περιγράφει, για δεδομένη χρονική στιγμή, στην περιοχή που καθορίζει η ανεξάρτητη χωρική μεταβλητή (η x -συντεταγμένη σε μονοδιάστατα προβλήματα).