ΘΕΜΑ 3[0,75+0,5+0,75] **(3α)** Είναι ο τελεστής $xp_y + xp_x x$ ερμιτιανός;

(3β) Αν $\left(\frac{d}{dx}\right)^+ = -\frac{d}{dx}$ να δείξετε ότι ο τελεστής $a\cdot\frac{d}{dx}$ είναι ερμιτιανός όταν το a είναι φανταστικός αριθμός.

(3γ) Να βρεθεί η μικρότερη δυνατή τιμή του $(\Delta x)(\Delta l_z)$.

(3α) $(xp_y + xp_x x)^+ = p_y^+ x^+ + (p_x x)^+ x^+ = p_y^+ x^+ + x^+ p_x^+ x^+ = p_y x + x p_x x = x p_y + x p_x x$. Άρα είναι.

(3β) $\left[\alpha\frac{d}{dx}\right]^+ = \alpha^*\left(\frac{d}{dx}\right)^+ = \alpha^*\left(-\frac{d}{dx}\right) = -\alpha^*\frac{d}{dx} = \alpha\frac{d}{dx}$ (τα ερμιτιανού) $\rightarrow (\alpha+\alpha^*)\frac{d}{dx} = 0 \rightarrow \alpha+\alpha^* = 0$

$\rightarrow \underline{\mathrm{Re}(\alpha) = 0}$

(3γ) Άσκηση 13.2 στο 13ο μάθημα.

$(\Delta x)(\Delta l_z) \geq \frac{1}{2}\left|\langle [x, l_z]\rangle\right|$, καθώς $[x, l_z] = [x, xp_y - yp_x] = [x, xp_y] - [x, yp_x] =$

$= x[x, p_y] + [x, x]p_y - y[x, p_x] - [x, y]p_x = -y\,i\hbar$ (τα 0 από κάτω)

Άρα $(\Delta x)(\Delta l_z) \geq \frac{1}{2}\left|\langle -i\hbar y\rangle\right| = \frac{\hbar}{2}|\langle y\rangle|$.

ΘΕΜΑ 4[1+0.5+1+1+0,5+0,5] Ηλεκτρόνιο μάζας m βρίσκεται περιορισμένο σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού πάχους L=1nm. Η κατάσταση του ηλεκτρονίου για t=0, περιγράφεται από την $\psi(x) = \left(i\cdot\psi_1(x) + \psi_3(x)\right)/\sqrt{2}$.

Να βρεθούν **(4α)** η μέση ενέργεια σε eV, **(4β)** το $\langle x\rangle(t=0)$ σε nm και **(4γ)** το $\langle p^2/2m\rangle(t)$.

Θεωρούμε ότι το «διεγερμένο» ηλεκτρόνιο μεταβαίνει στην αμέσως κατώτερη ενεργειακή στάθμη.

Αν $\langle E\rangle = 5\hbar^2\pi^2/4mL^2$ και $\langle x\rangle(t=0) = L/2$ να βρεθούν **(4δ)** η $\psi(x,t)$, **(4ε)** το $\langle p\rangle(t)$ και **(4στ)** να αποδείξετε ότι ισχύει το 1ο θεώρημα του Ehrenfest. Δίνεται $x_{21} = 16L/9\pi^2$ και $p_{21} = -8i\hbar/3L$.

Φυσικές σταθερές, $h = 6,626\times10^{-34}\,J\cdot s$, $m_e = 9,1\times10^{-31}\,kg$, $e = 1,6\times10^{-19}\,C$.

$E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$, $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ στο $[0,L]$

(α) $\langle E\rangle = P_1E_1 + P_3E_3 = \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2E_1 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2E_3 = \frac{1}{2}\left(E_1+E_1\cdot3^2\right) = \frac{10}{2}E_1 = \frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

Άρα $\frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{5h^2}{8mL^2} = \frac{5\cdot6,626^2\cdot(10^{-34})^2}{8\cdot9,1\cdot10^{-31}\cdot(10^{-9})^2}\frac{eV}{1,6\cdot10^{-19}} \cong 1,88\,eV$ (γιατί πάμε από J σε eV)

(β) $\langle x\rangle(t) = |c_1|^2x_{11} + |c_3|^2x_{33} + 2|c_1||c_3|\,|x_{31}|\cos(\omega t + \phi_{13} + \delta_{31}^x)$. Γνωρίζουμε ότι $x_{11} = x_{33} = L/2$, ενώ το στοιχείο $x_{31} = \frac{2}{L}\int\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)x\,dx = 0$, όπου χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $2\sin A\sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$ και $\int x\cos Ax\,dx = \frac{1}{A}x\sin Ax\Big|_0^L + \frac{1}{A^2}\cos Ax\Big|_0^L$. Το γεγονός ότι $x_{31} = 0$, μπορούσε να το βρούμε και με πιο "φυσικό" τρόπο. Μετατοπίζουμε το πηγάδι δυναμικού κατά $-L/2$, οπότε και χίνεται συμμετρικό. Τότε ψ_1 και ψ_3 είναι άρτιες το $x_{31} = \int x\psi_1\psi_3\,dx = 0$ γιατί $x\psi_1\psi_3$ περιττή. Άρα στο συμμετρικό $\langle x\rangle = 0$, έτσι στο μετατοπισμένο $\langle x\rangle(t=0) = L/2 = 0,5\,nm$.

(γ) $\langle p^2\rangle(t) = |c_1|^2P_{11}^2 + |c_3|^2P_{33}^2 + 2|c_1||c_3|\,|P_{31}^2|\cos(\omega t + \phi_{13} + \delta_{31}^{p^2})$. Γενικά $P_{nm}^2 = \frac{2}{L}\int\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\left(-\hbar^2\right)\frac{\partial^2}{\partial x^2}\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx =$

$= \frac{2}{L}\left(-\hbar^2\right)\left(\frac{m^2\pi^2}{L^2}\right)\int\sin^2\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx = \frac{\hbar^2n^2\pi^2}{L^2}$. Ενώ $P_{31}^2 = \hbar^2\frac{2}{L}\int\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\left(\frac{\pi^2}{L^2}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{\hbar^2\pi^2}{L^2}\int\left[\cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\right]dx = 0$

Άρα $\left\langle\frac{p^2}{2m}\right\rangle(t) = |c_1|^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}1^2 + |c_3|^2\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}3^2 = \frac{5\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \langle E\rangle$. Αναμενόμενο καθώς στο ΑΠΔ έχουμε μόνο ενεργειακή ενέργεια.

(δ) Έχουμε "μετάβαση" από την ψ_3 στην ψ_2. Οπότε $\psi(x) = c_1\psi_1 + c_2\psi_2$. Μας δίνεται ότι $\langle E\rangle = |c_1|^2E_1 + |c_2|^2E_2 = |c_1|^2E_1 + |c_2|^2 4E_1 = (|c_1|^2 + 4|c_2|^2)\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} = \frac{5\hbar^2\pi^2}{4mL^2} \rightarrow |c_1|^2 + 4|c_2|^2 = \frac{5}{2}$ και $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$ οπότε $|c_1| = |c_2| = 1/\sqrt{2}$. Τώρα $\langle x\rangle(t) = |c_1|^2x_{11} + |c_2|^2x_{22} + 2|c_1||c_2|\,|x_{21}|\cos(\omega t + \phi_{12} + \delta_{21}^x) = \frac{1}{2}(x_{11} + x_{22})$ $+ 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|x_{21}|\cos(\omega t + \phi_{12} + \delta_{21}^x)$. Αφού $x_{21} = 16L/9\pi^2 \rightarrow |x_{21}| = 16L/9\pi^2$ και $\delta_{21}^x = \pi$ οπότε $\langle x\rangle(0) = \frac{L}{2} + \frac{16L}{9\pi^2}\cos(\phi_{12}) = \frac{L}{2}$

Άρα $\cos(\phi_{12}) = 0 \rightarrow \phi_{12} = \frac{\pi}{2}$. Έτσι έχουμε $\psi(x,t) = \frac{e^{i\phi_{12}}\psi_1e^{-iE_1t/\hbar} + \psi_2e^{-iE_2t/\hbar}}{\sqrt{2}} = \frac{i\psi_1e^{-iE_1t/\hbar} + \psi_2e^{-iE_2t/\hbar}}{\sqrt{2}}$

(ε) $\langle p\rangle(t) = |c_1|^2p_{11} + |c_2|^2p_{22} + 2|c_1||c_2|\,|p_{21}|\cos(\omega t + \phi_{12} + \delta_{21}^p)$, $p_{11} = p_{22} = 0$, $p_{21} = -\frac{8i\hbar}{3L} = \frac{8\hbar}{3L}e^{-i\frac{\pi}{2}} \rightarrow \delta_{21}^p = -\pi/2$

Έτσι $\langle p\rangle(t) = |p_{21}|\cos(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}) = \frac{8\hbar}{3L}\cos(\omega t)$ όπου $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar$.

(στ) Επαλήθευση 1ου θεωρήματος Ehrenfest $\langle p\rangle(t) = m\frac{d}{dt}\langle x\rangle(t)$. $\langle x\rangle(t) = \frac{L}{2} + \frac{16L}{9\pi^2}\cos(\omega t + \frac{\pi}{2} + \pi) = \frac{L}{2} + \frac{16L}{9\pi^2}\sin(\omega t)$

και $m\frac{d}{dt}\langle x\rangle(t) = \frac{m16L}{9\pi^2}\omega\cos\omega t = \frac{16Lm}{9\pi^2}\left[\frac{E_2-E_1}{\hbar}\right]\cos\omega t = \frac{16Lm}{9\pi^2}\frac{\hbar^2\pi^2(4-1)}{2mL^2\hbar} = \frac{3\cdot16}{9\cdot2}\frac{\hbar}{L} = \frac{8\hbar}{3L}\cos\omega t = \langle p\rangle(t)$

επαληθεύτηκε.