ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι (ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ) 5 Νοέμβρη 2018 (Διδάσκων: Αντρέας Φ. Τερζής)

Όνομα: **Επώνυμο:** **Α.Μ.:**

ΘΕΜΑ 1[0.75+0.75+0,5] Έστω ότι η κυματοσυνάρτηση ενός κβαντικού σωματιδίου είναι $\psi(x)=|N|\left(x-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)e^{(-\lambda x^2/2)}$

Να βρεθούν **(1α)** η σταθερά $|N|$ και **(1β)** η μέση θέση του σωματιδίου. **(1γ)** Να «υποστηρίξετε» με κατάλληλη γραφική παράσταση το πρόσημο της μέσης θέσης.

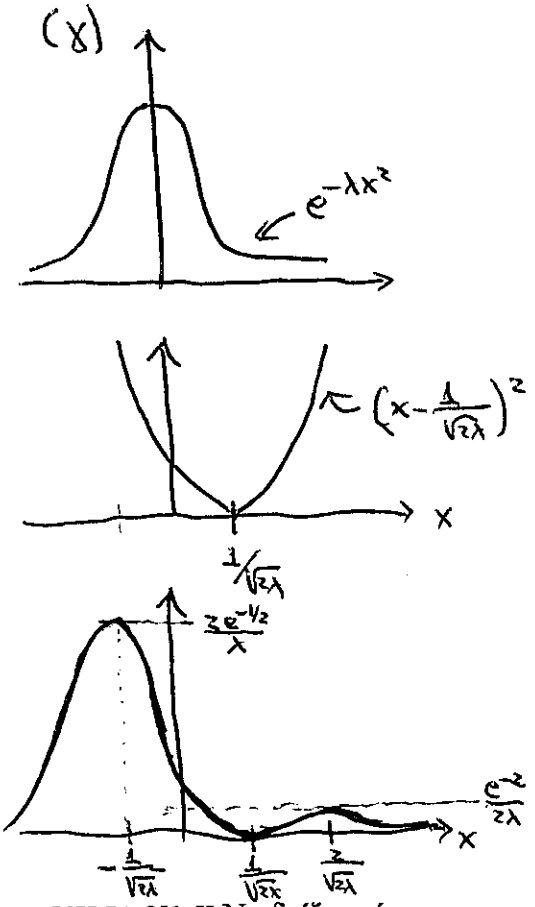
(α) $|N|^2\int\left(x-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)^2 e^{-\lambda x^2}dx=1 \to |N|^2\left[\int x^2e^{-\lambda x^2}dx-\frac{2}{\sqrt{2\lambda}}\int x e^{-\lambda x^2}dx+\frac{1}{2\lambda}\int e^{-\lambda x^2}dx\right]=|N|^2\left[\frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}+\frac{1}{2\lambda}\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}}\right]$

$=|N|^2\sqrt{\frac{\pi}{\lambda^3}}=1 \to \boxed{|N|=\left(\frac{\lambda^3}{\pi}\right)^{1/4}}$

(β) $\langle x\rangle=\int N^2x\left(x-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)^2e^{-\lambda x^2}dx=\left(\frac{\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\left[\int x^3e^{-\lambda x^2}dx-\frac{2}{\sqrt{2\lambda}}\int x^2e^{-\lambda x^2}dx+\frac{1}{2\lambda}\int xe^{-\lambda x^2}dx\right]=$

$=\left(\frac{\lambda^3}{\pi}\right)^{1/2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2\lambda}}\right)\frac{1}{2\lambda}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{1/2}=\lambda\left(-\frac{2}{\sqrt{2\lambda}}\right)\frac{1}{2\lambda}=-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ $\boxed{\langle x\rangle=-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}}$

(γ)



$\underline{P}(x)dx=\left(x-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)^2e^{-\lambda x^2}dx$

Από την παράγωγο βρίσκουμε τρία ακρότατα $\pm\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ & $\frac{2}{\sqrt{2\lambda}}$

Από "πρόχειρη" γραφική κατασκευή βλέπουμε ότι $+\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}$ ελάχιστο

Τα άλλα δυο τοπικά μέγιστα

Τώρα $\left(x-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}\right)^2 \xrightarrow{-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}} \frac{2}{\lambda}$ & $\frac{1}{2\lambda}$ $\quad$ $e^{-\lambda x^2} \xrightarrow{-\frac{1}{\sqrt{2\lambda}}} e^{-1/2}\sim 1,21$ $\quad$ $\xrightarrow{\frac{2}{\sqrt{2\lambda}}} e^{-2}\sim 0,13$

Το πάνω μέγιστο είναι περίπου $4e^{+3/2}\sim 18$ φορές πιο πάνω.

Από την γραφική φαίνεται ότι τα αρνητικά x έχουν πολύ μεγαλύτερη πιθανότητα, άρα πολύ λογικό το αρνητικό πρόσημο στο $\langle x\rangle$.

ΘΕΜΑ 2[1,5] Να δείξετε ότι η κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t)=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}\left(1+i\frac{\hbar\lambda t}{m}\right)^{-1/2}e^{\left(\frac{-\lambda x^2}{2\left(1+i\frac{\hbar\lambda t}{m}\right)}\right)}$ είναι κανονικοποιημένη.

(1ος τρόπος) Για $t=0$, έχουμε $\psi(x,0)=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}e^{-\lambda x^2/2}$ Από τα πρώτα μαθήματα έχουμε δείξει ότι η $\psi(x,0)$ αυτού της μορφής είναι κανονικοποιημένη. Αν θέλετε κάντε πράξεις για επαλήθευση. Τώρα στην άσκηση 9.2 (3ο μάθημα) δείχνει ότι η εξίσωση αυτή είναι λύση της χρονοεξαρτώμενης εξ. Schrödinger. Από την άλλη γνωρίζουμε ότι αν η $\psi(x,t)$ είναι λύση της εξ. Schrödinger και είναι κανονικοποιημένη για κάποια χρονική στιγμή (εδώ $t=0$) θα είναι για κάθε t κανονικοποιημένη.

(2ος τρόπος) Με πράξεις $\psi(x,t)=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}(1+i\alpha t)^{-1/2}e^{-\lambda x^2/2(1+i\alpha t)}$ όπου $\alpha=\hbar\lambda/m$

Οπότε $\psi^*\psi=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}(1-i\alpha t)^{-1/2}(1+i\alpha t)^{-1/2}e^{-\lambda x^2/2(1-i\alpha t)}e^{-\lambda x^2/2(1+i\alpha t)}$

$(1-i\alpha t)(1+i\alpha t)=1+\alpha^2t^2$ Στα εκθετικά $-\frac{\lambda x^2}{2}\left[\frac{1}{1+i\alpha t}+\frac{1}{1-i\alpha t}\right]=-\frac{\lambda x^2}{2}\frac{2}{(1+\alpha^2t^2)}=-\frac{\lambda x^2}{1+\alpha^2t^2}$

Ορίζω $\tilde{\lambda}=\lambda/(1+\alpha^2t^2)$ $\to$ $\int\psi^*\psi dx=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\frac{1}{(1+\alpha^2t^2)^{1/2}}e^{-\left(\frac{\lambda}{1+\alpha^2t^2}\right)x^2}dx=$

$=\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\pi}\right)^{1/2}\int e^{-\tilde{\lambda}x^2}dx=\left(\frac{\tilde{\lambda}}{\pi}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\tilde{\lambda}}\right)^{1/2}=1.$