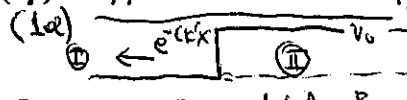
ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι (2η ΠΡΟΟΔΟΣ) 17 Δεκέμβρη 2018 (Διδάσκων: Αντρέας Φ. Τερζής)

Όνομα: **Επώνυμο:** **Α.Μ.:**

ΘΕΜΑ 1[1,5x2] **(1α)** Να βρείτε τον συντελεστή ανάκλασης για σκέδαση από το $+\infty \to -\infty$ σε σκαλοπάτι δυναμικού. **(1β)** Να βρείτε τον συντελεστή διέλευσης για σκέδαση από το $-\infty \to +\infty$ σε δυναμικό $V(x) = g \cdot \delta(x)$.

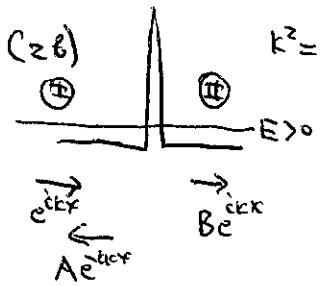
(1α)



e^{-ikx}, e^{ikx} $\quad \psi_I = Be^{-ik'x}$ $\quad \psi_{II} = e^{-ikx} + Ae^{ikx}$ $\quad k^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$ $\quad k'^2 = 2mE/\hbar^2$

Σ.Σ. στο $x=0$ $\quad 1+A=B$ $\quad -ik + ikA = -ik'B \to A = \frac{k'-k}{k'+k} \to R = |A|^2 = \left(\frac{k'-k}{k'+k}\right)^2$

(1β)



$k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ $\quad$ Σ.Σ. $\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \to 1+A=B$ $\quad (A = B-1)$

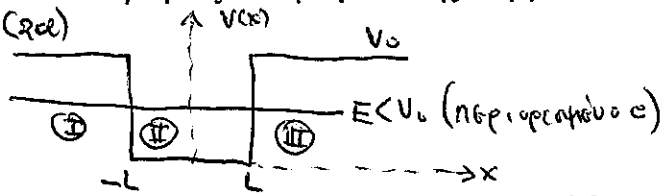
$\psi'_{II}(0) - \psi'_I(0) = \frac{2mg}{\hbar^2}\psi(0) \to ikB - ik(1-A) = \frac{2mg}{\hbar^2}B$

$ik(2B-1) = \frac{2mg}{\hbar^2}B \to B + i\frac{mg}{k\hbar^2}B = 1$

Άρα $B = \frac{1}{1+\frac{img}{\hbar^2 k}} \to T = |B|^2 = \frac{1}{1+\frac{m^2g^2}{\hbar^4k^2}} = \frac{\hbar^4k^2}{\hbar^4k^2+m^2g^2}$

ΘΕΜΑ 2[1,5+1] Ηλεκτρόνιο μάζας m είναι περιορισμένο σε τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού $V(x) = V_0 \cdot \Theta(|x|-L)$, να αποδείξετε **(2α)** την συνθήκη από την οποία υπολογίζονται οι ιδιοτιμές της ενέργειας για τις άρτιες ιδιοσυναρτήσεις. Αν η θεμελιώδης ενέργεια είναι $E = V_0/2$, να βρεθεί **(2β)** το $V_0 = f(m,L)$.

(2α)



$\psi_I = Ae^{\gamma x}$, $\psi_{II} = B\cos kx$ (άρτια), $\psi_{III} = Ae^{-\gamma x}$

όπου $\gamma^2 = \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2}$ και $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$

Σ.Σ. στο $x=L$ $\quad \psi_{II}(L) = \psi_{III}(L) \to \underbrace{B\cos kL = Ae^{-\gamma L}}_{①}$ και $\psi'_{II}(L) = \psi'_{III}(L) \to \underbrace{-Bk\sin kL = -A\gamma e^{-\gamma L}}_{②}$

Διαιρώ $\frac{②}{①} \to \frac{-k\sin kL}{\cos kL} = -\gamma \to \boxed{\tan kL = \frac{\gamma}{k}}$

(2β) $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} = \frac{2mV_0}{\hbar^2 2} = \frac{mV_0}{\hbar^2}$, $\gamma^2 = \frac{2m(V_0-E)}{\hbar^2} = \frac{2m(V_0-\frac{V_0}{2})}{\hbar^2} = \frac{mV_0}{\hbar^2} \to k^2 = \gamma^2 \to k = \gamma$

$k = \sqrt{V_0}\cos\theta$ $\quad \gamma = \sqrt{V_0}\sin\theta \to \sin\theta = \cos\theta$ (για θ στο $[0, \frac{\pi}{2}]$) $\to \theta = \frac{\pi}{4}$ (45°)

Τώρα για θεμελιώδη $n=0 \to \cos\theta = \frac{\theta}{\lambda} \to \cos\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}} \to \lambda = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$

Αλλά $\lambda = \sqrt{V_0}L \to \lambda^2 = V_0L^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2}L^2 = \frac{\pi^2}{8} \to \boxed{V_0 = \frac{\hbar^2\pi^2}{16mL^2}}$

ΘΕΜΑ 3[0,5x3+1+1,5+0,5] Ηλεκτρόνιο βρίσκεται περιορισμένο σε δυναμικό κβαντικού αρμονικού ταλαντωτή. Αν η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου είναι $\psi(x,t)=|c|\left(i\cdot\psi_0(x)e^{-i\varepsilon t}+\psi_1(x)e^{-i(\varepsilon+1)t}\right)$. Να βρεθούν **(3α)** το $|c|$ **(3β)** το ε, και το $\langle x\rangle(t=0)$ **(3γ1)** από την $\langle x\rangle(t)=\left(\psi(x,t),x\psi(x,t)\right)$ και με **(3γ2)** την αλγεβρική μέθοδο.

Η κυματοσυνάρτηση μετά από αλληλεπίδραση με ένα πεδίο γίνεται $\psi(x,t=0)=|c_0|e^{i\varphi_{01}}\psi_0+|c_1|\psi_1$. Αν $\langle E\rangle=1$ και $\langle p\rangle(t=0)=0$ να βρεθούν **(3δ)** η $\psi(x,t)$ **(3ε)** το $\langle x\rangle(t=0)$ σε *nm*. Δίνεται $\omega=10^{14}rad/s$, $\psi_0=e^{-x^2/2}/\pi^{1/4}$, $\psi_1=\sqrt{2}xe^{-x^2/2}/\pi^{1/4}$, $\psi_2=(2x^2-1)e^{-x^2/2}/(\sqrt{2}\pi^{1/4})$, $\hbar\sim10^{-34}Js$ και $m_e\sim10^{-30}kg$.

(3α) $|c|^2|c|^2+|c|^2=1 \rightarrow 2|c|^2=1 \rightarrow |c|^2=1/2 \rightarrow |c|=1/\sqrt{2}$

(3β) $\psi_0 e^{-i\varepsilon t}$ αλλά $\psi_0 e^{-iE_0 t} \rightarrow \varepsilon=E_0=0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

(3γ1) $\langle x\rangle(t=0)=\left(\frac{i\psi_0+\psi_1}{\sqrt{2}},x\frac{(i\psi_0+\psi_1)}{\sqrt{2}}\right)=\frac{1}{2}(\psi_0,x\psi_0)+\frac{1}{2}(\psi_1,x\psi_1)+\frac{i}{2}(\psi_1,x\psi_0)+\frac{-i}{2}(\psi_0,x\psi_1)=0+0+\frac{i}{2}\underbrace{\left((\psi_1,x\psi_0)-(\psi_0,x\psi_1)\right)}_{=0}$ (άρτιες περιττές ολοκληρώνεται περιττό και ίσον μηδέν για τις x)

(3γ2) $\langle x\rangle(t=0)=\frac{(-i\langle 0|+\langle 1|)}{\sqrt{2}}\frac{(x+\hat{x}^\dagger)}{\sqrt{2}}\frac{(i|0\rangle+|1\rangle)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\underbrace{\left[-i\langle 0|0\rangle+i\langle 1|1\rangle\right]}_{=0}$ η συμμετρικό και ίσον μηδέν για τις x

(3δ) $|c_0|^2+|c_1|^2=1$ & $|c_0|^2\frac{1}{2}+|c_1|^2\frac{3}{2}=1 \rightarrow |c_0|^2=|c_1|^2=\frac{1}{2} \rightarrow |c_0|=|c_1|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\langle p\rangle(t)=|c_0|^2p_{00}+|c_1|^2p_{11}+2|c_0||c_1||p_{10}|\cos(\omega_{10}t+\varphi_{01}+\delta^p_{10})$, $p_{00}=p_{11}=0$ για πολλούς λόγους!

$\langle p\rangle(t=0)=|p_{10}|\cos(\varphi_{01}+\delta^p_{10})$ $\quad p_{10}=\langle 1|\hat{p}|0\rangle=\langle 1|\frac{a-a^\dagger}{i\sqrt{2}}|0\rangle=\frac{\langle 1|a|0\rangle}{i\sqrt{2}}-\frac{\langle 1|a^\dagger|0\rangle}{i\sqrt{2}}=\frac{i}{\sqrt{2}}$ άρα $|p_{10}|=1/\sqrt{2}$ & $\delta^p_{10}=\frac{\pi}{2}$

οπότε $\langle p\rangle(t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\varphi_{01}+\frac{\pi}{2})=0$ ← δεδομένου $\rightarrow \sin\varphi_{01}=0 \rightarrow \varphi_{01}=0$

Οπότε έχουμε $\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{3}{2}t}\psi_0e^{-i\frac{t}{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1e^{-3i\frac{t}{2}}=\frac{\left(\psi_0e^{-i\frac{t}{2}}+\psi_1e^{-3i\frac{t}{2}}\right)}{\sqrt{2}}$

(3ε) $\langle x\rangle(t)=|c_0|^2x_{00}+|c_1|^2x_{11}+2|c_0||c_1||x_{10}|\cos(\omega_{10}t+\varphi_{01}+\delta^x_{10})$, $x_{00}=x_{11}=0$

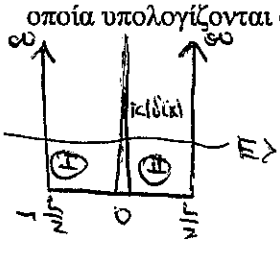
$\langle x\rangle(t)=|x_{10}|\cos(\omega_{10}t+0+\delta^x_{10})$ $\quad x_{10}=\langle 1|x|0\rangle=\langle 1|\frac{a+a^\dagger}{\sqrt{2}}|0\rangle=\frac{\langle 1|1\rangle}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \omega_{10}=\frac{E_1-E_0}{\hbar}=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=1$ $\quad |x_{10}|=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\delta^x_{10}=0$

$\langle x\rangle(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\omega_{10}t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos t$

$\langle x\rangle(t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}$ Σε nm πολ/ζει με $x_0=\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\sim\sqrt{\frac{10^{-34}}{10^{-30}\cdot10^{14}}}(SI)=\sqrt{10^{-18}}=10^{-9}$ άρα $x_0=1nm$

$\propto \langle x\rangle(t=0)=\frac{1}{\sqrt{2}}nm$.

ΘΕΜΑ 4{bonus} [1] Για ηλεκτρόνιο περιορισμένο σε δυναμικό $V(x)=\begin{cases}+\infty & |x|>L/2\\ |c|\delta(x) & |x|<L/2\end{cases}$ να βρείτε την συνθήκη από την οποία υπολογίζονται οι ιδιοτιμές της ενέργειας.



$\psi_I=A\sin(k(x+\frac{L}{2}))$

$\psi_{II}=B\sin(k(x-\frac{L}{2}))$

έτσι ώστε $\psi_I(-\frac{L}{2})=0$

& $\psi_{II}(+\frac{L}{2})=0$

Σ.Σ. $x=0$ $A\sin k\frac{L}{2}=B\sin(-k\frac{L}{2}) \rightarrow A=-B$

και $\psi'_{II}(0)-\psi'_I(0)=\frac{2m|c|}{\hbar^2}\psi(0) \rightarrow$

$Bk\cos k(-\frac{L}{2})-Ak\cos k\frac{L}{2}=\frac{2m|c|}{\hbar^2}A\sin k\frac{L}{2}$

$-2Ak\cos(k\frac{L}{2})=\frac{2m|c|}{\hbar^2}A\sin k\frac{L}{2} \Rightarrow$ $\boxed{\tan\left(k\frac{L}{2}\right)=\frac{-\hbar^2k}{m|c|}}$