**ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι (1η ΠΡΟΟΔΟΣ)** 19 Νοέμβρη 2018 (Διδάσκων: Αντρέας Φ. Τερζής)

**Όνομα:** **Επώνυμο:** **Α.Μ.:**

**ΘΕΜΑ 1**[0.5x3] **(1α)** Να δείξετε ότι αν $A$, $B$ είναι ερμιτιανοί τελεστές και ο τελεστής $[A,iB]$ είναι ερμιτιανός.

**(1β)** Αν το $a$ είναι πραγματικός αριθμός, είναι ο τελεστής $a\cdot(d^2/dx^2)+ia\cdot(d/dx)$ ερμιτιανός;

**(1γ)** Να βρεθεί η μικρότερη δυνατή τιμή του γινομένου των αβεβαιοτήτων $(\Delta l_x)(\Delta l_y)$.

(1α) $[A,iB]^+ = (AiB - iBA)^+ = (iAB)^+ - (iBA)^+ = -iB^+A^+ - (-iA^+B^+) = -iBA + iAB = i(AB-BA) = i[A,B] = [A,iB]$

(1β) $\left[a\frac{d^2}{dx^2} + ia\frac{d}{dx}\right]^+ = a\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^+ + \left(ia\frac{d}{dx}\right)^+ = a\frac{d^2}{dx^2} - ia\left(-\frac{d}{dx}\right) = a\frac{d^2}{dx^2} + ia\frac{d}{dx}$, όπου χρειαστήκαμε ότι $\left(\frac{d^2}{dx^2}\right)^+ = \left(\frac{d}{dx}\right)^2 = p^2$ ($p$: ερμιτιανός) και $\left(\frac{d}{dx}\right)^+ = -\frac{d}{dx}$ (βρήκατε και αλλού ταλαντώσεις φερμιονίου!)

(1γ) Ελάχιστο $(\Delta l_x)(\Delta l_y) = \frac{1}{2}|\langle [l_x, l_y]\rangle|$

$[l_x, l_y] = [yp_z - zp_y, zp_x - xp_z] = [yp_z, zp_x] - [zp_y, zp_x] + [zp_y, xp_z] - [yp_z, xp_z] =$ ($[zp_y, zp_x] = 0$)

$y[p_z, z]p_x + [z, p_z]p_y x = -i\hbar y p_x + i\hbar p_y x = i\hbar(x p_y - y p_x) = i\hbar l_z$

Άρα $[(\Delta l_x)(\Delta l_y)]_{min} = \frac{\hbar}{2}|\langle l_z\rangle|$

**ΘΕΜΑ 2**[0.5x3+1.5+0.5] Ηλεκτρόνιο μάζας $m$ βρίσκεται περιορισμένο στην περιοχή $[0, L(=1nm)]$. Αν η κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου είναι $\psi(x,t) = |c|\left(i\cdot\psi_1(x)e^{-i\varepsilon t/\hbar} + \psi_2(x)e^{-i4\varepsilon t/\hbar}\right)$. Να βρεθούν **(2α)** το $|c|$ **(2β)** το $\varepsilon$, και **(2γ)** το $\langle p^2/2m\rangle(t)$ σε $eV$. Θεωρούμε ότι η κυματοσυνάρτηση μετά από αλληλεπίδραση με ένα πεδίο γίνεται $\psi(x,t=0) = |c_1|e^{i\varphi_{12}}\psi_1 + |c_2|\psi_2$. Αν $\langle E\rangle = 5\hbar^2\pi^2/4mL^2$ και $\langle p\rangle(t=0) = 8\hbar/3L$ να βρεθούν **(2δ)** η $\psi(x,t)$, **(2ε)** το $\langle x\rangle(t)$. Δίνεται $x_{21} = -16L/9\pi^2$, $p_{21} = -8i\hbar/3L$, $h = 6{,}626\times10^{-34}\,J\cdot s$, $m_e = 9{,}1\times10^{-31}\,kg$, $e = 1{,}6\times10^{-19}\,C$.

(2α) Κανονικοποίηση $\psi(x,t) \to |c|^2|c|^2 + |c|^2 = 2|c|^2 = 1 \to |c| = 1/\sqrt{2}$

(2β) Καθώς $\psi(x,t) = \frac{c}{\sqrt{2}}\psi_1 e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 e^{-i\varepsilon_2 t/\hbar}$ $\quad \varepsilon_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ $\quad \varepsilon_2 = \frac{4\hbar^2\pi^2}{2mL^2}2^2 = 4\varepsilon_1$

περιφανώς $\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

(2γ) $\langle p^2/2m\rangle(t) = \langle E\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon_1 + \frac{1}{2}\varepsilon_2 = \frac{1}{2}(\varepsilon_1 + 4\varepsilon_1) = \frac{5}{2}\varepsilon_1 = \frac{5}{4}\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2} = (\text{βλέπε τυπολόγιο}) = 9{,}4\,eV$

(2δ) $\langle E\rangle = |c_1|^2\varepsilon_1 + |c_2|^2\varepsilon_2 = |c_1|^2\varepsilon_1 + |c_2|^2 4\varepsilon_1 = \frac{5}{4}\frac{\hbar^2\pi^2}{mL^2} \to |c_1|^2 + 4|c_2|^2 = \frac{5}{2}$ και $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$

Αφαιρώ $3|c_2|^2 = \frac{5}{2} - 1 = \frac{3}{2} \to |c_1|^2 = \frac{1}{2}$ & $|c_2|^2 = \frac{1}{2} \to |c_1| = |c_2| = 1/\sqrt{2}$

$\langle p\rangle(t) = |c_1|^2 p_{11} + |c_2|^2 p_{22} + 2|c_1||c_2||p_{21}|\cos(\omega t + \phi_{12} + \delta_{21}^p) \overset{t=0}{=} (\text{αφού } p_{11} = p_{22} = 0) = |p_{21}|\cos(\phi_{12} + \delta_{21}^p)$

$p_{21} = \frac{8\hbar}{3L}(-i) = \frac{8\hbar}{3L}e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $\left(\delta_{21}^p = -\frac{\pi}{2}\right)$ & $\langle p\rangle(t=0) = \frac{8\hbar}{3L}\cos\left(\phi_{12} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{8\hbar}{3L}\sin(\phi_{12}) = \frac{8\hbar}{3L} \to \sin\phi_{12} = 1$

δεδομένου άσκησης

Άρα $\phi_{12} = \frac{\pi}{2}$

Οπότε $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}\psi_1 e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 e^{-i\varepsilon_2 t/\hbar} = \frac{i\psi_1 e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar} + \psi_2 e^{-i4\varepsilon_1 t/\hbar}}{\sqrt{2}}$

(2ε) $\langle x\rangle(t) = |c_1|^2 x_{11} + |c_2|^2 x_{22} + 2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\omega t + \phi_{12} + \delta_{21}^x)$

$x_{21} = -\frac{16L}{9\pi^2} = \frac{16L}{9\pi^2}(-1) = \frac{16L}{9\pi^2}e^{i\pi} \to \delta_{21}^x = \pi$ & $|x_{21}| = \frac{16L}{9\pi^2}$

Άρα $\langle x\rangle(t) = \frac{L}{2} + \frac{16L}{9\pi^2}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} + \pi\right) = \frac{L}{2} + \frac{16L}{9\pi^2}\sin\omega t$

$x_{11} = x_{22} = \frac{L}{2}$ ($|c_1|^2 = |c_2|^2 = \frac{1}{2}$) $\qquad \omega = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\hbar} = \frac{(4-1)\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}}{\hbar} = \frac{3}{2}\frac{\hbar\pi^2}{2mL^2}$

**ΘΕΜΑ 3**[1.5+1+0.75+1+0.75] Θεωρούμε ένα ερμιτιανό τελεστή $W = |w| \cdot \left( |1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2| \right)$, σε κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή $H$, η οποία σε μορφή πίνακα χρησιμοποιώντας τις ιδιοσυναρτήσεις $|1\rangle$ και $|2\rangle$ είναι $H = \begin{bmatrix} \varepsilon & -i\delta \\ i\delta & \varepsilon \end{bmatrix}$. **(3α)** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας. Την χρονική στιγμή $t$=0, μετράμε το φυσικό μέγεθος που σχετίζονται με τον τελεστή $W$ και βρίσκουμε θετική τιμή. Να βρεθούν **(3β)** η $\psi(x,t)$ και **(3γ)** η $\langle W \rangle(t)$. Για τον τελεστή $K = k \cdot \left( |1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| - i|1\rangle\langle 2| + i|2\rangle\langle 1| \right)$, να βρεθούν **(3δ)** οι πιθανότητες να μετρήσω κάθε μία από τις ιδιοτιμές του και να υπολογίσετε **(3ε)** το $d\langle K \rangle(t)/dt$.

(3α) $\det \begin{bmatrix} \varepsilon-\lambda & -i\delta \\ i\delta & \varepsilon-\lambda \end{bmatrix} = 0 \to (\varepsilon-\lambda)^2 - \delta^2 = 0 \to \lambda_\pm = \varepsilon \pm \delta$

$\lambda_+ = \varepsilon+\delta \to \begin{bmatrix} \varepsilon-\varepsilon-\delta & -i\delta \\ i\delta & \varepsilon-\varepsilon-\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_+ \\ y_+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to -\delta x_+ - i\delta y_+ = 0 \to y_+ = i x_+$ & $|x_+|^2 + |y_+|^2 = 1$

$|+\rangle = \frac{|1\rangle + i|2\rangle}{\sqrt{2}}$

$\lambda_- = \varepsilon-\delta \to \begin{bmatrix} \delta & -i\delta \\ i\delta & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_- \\ y_- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \to \delta x_- - i\delta y_- = 0 \to y_- = -i x_-$ & $|y_-| = |x_-| = 1/\sqrt{2} \to |-\rangle = \frac{|1\rangle - i|2\rangle}{\sqrt{2}}$

Αφού $W = |w||1\rangle\langle 1| - |w||2\rangle\langle 2| \to \begin{matrix} W|1\rangle = |w||1\rangle \\ W|2\rangle = -|w||2\rangle \end{matrix}$

Αφού μετρώ θετική τιμή $|\psi(x,t=0)\rangle = |1\rangle$

(3β) Άρα $|\psi(x,t)\rangle = c_+|+\rangle e^{-i(\varepsilon+\delta)t/\hbar} + c_-|-\rangle e^{-i(\varepsilon-\delta)t/\hbar}$ με $c_+ = \langle +|\psi(x,0)\rangle = \langle +|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

& $c_- = \langle -|\psi(x,0)\rangle = \langle -|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Άρα $|\psi(x,t)\rangle = \frac{\left(|+\rangle e^{-i\delta t/\hbar} + |-\rangle e^{i\delta t/\hbar}\right) e^{i\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}} \sim \frac{|+\rangle e^{-i\delta t/\hbar} + |-\rangle e^{i\delta t/\hbar}}{\sqrt{2}}$

(3γ) $\langle W \rangle(t) = |c_+|^2 W_{++} + |c_-|^2 W_{--} + 2|c_+||c_-||W_{-+}| \cos(\omega t + \varphi_{+-} + \delta^W_{-+})$

Από $|\psi(x,t)\rangle$, $e^{i\varphi_{+-}} = 1 \to \varphi_{+-} = 0$

$W_{++} = \langle +|W|+\rangle = \langle +|\left(|w||1\rangle\langle 1| - |w||2\rangle\langle 2|\right)|+\rangle = \frac{|w|}{2} - \frac{|w|}{2} = 0$ αντίστοιχα $W_{--} = 0$

& $W_{-+} = \langle -|W|+\rangle = \langle -|\left(|w||1\rangle\langle 1| - |w||2\rangle\langle 2|\right)|+\rangle = +\frac{|w|}{2} + \frac{|w|}{2} = |w| \to |W_{-+}| = |w|$ & $\delta^W_{-+} = 0$

όπου στις πράξεις χρησιμοποιήθηκαν οι σχέσεις $\langle +|1\rangle = \langle -|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\langle +|2\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}$, $\langle -|2\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}$

Έτσι $\langle W \rangle(t) = |w| \cos(\omega t)$ με $\omega = \frac{-\delta-\delta}{\hbar} = -\frac{2\delta}{\hbar}$.

(3δ) Πρώτα βρίσκω ιδιοτιμές & ιδιοσυναρτήσεις $K$

$\det \begin{bmatrix} k-\lambda & -ik \\ ik & k-\lambda \end{bmatrix} = 0 \to (k-\lambda)^2 - k^2 = 0 \to \lambda = \begin{matrix} 0 \\ 2k \end{matrix}$ με $\lambda_0$ ιδιοσυνάρτηση $|0\rangle = \frac{|1\rangle - i|2\rangle}{\sqrt{2}}$ και $|2k\rangle = \frac{|1\rangle + i|2\rangle}{\sqrt{2}}$

Βλέπουμε ότι $|0\rangle = |-\rangle$ (ιδιοκατάσταση ενέργεια $\varepsilon-\delta$) & $|2k\rangle = |+\rangle$ (ιδιοκατάσταση ενέργεια $\varepsilon+\delta$)

Άρα $K = 0 \cdot |-\rangle\langle -| + 2k|+\rangle\langle +|$

Έτσι πιθανότητα για $\lambda = 0$ $P_0 = |\langle 0|\psi(x,t)\rangle|^2 = |\langle -|\psi(x,t)\rangle|^2 = \left|\frac{e^{i\delta t/\hbar}}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

και $P_{2k} = |\langle 2k|\psi(x,t)\rangle|^2 = |\langle +|\psi(x,t)\rangle|^2 = \left|\frac{e^{-i\delta t/\hbar}}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

Τέλος $\langle K \rangle(t) = P_0 \cdot 0_K + P_{2K} 2_K = \frac{2k}{2} = k$ άρα $\frac{d\langle K \rangle(t)}{dt} = 0$.

Επίσης εύκολα βρίσκουμε ότι $[K,H] = KH - HK = 0$ όπου $\frac{d\langle K \rangle(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle [K,H] \rangle = 0$

ότι $[K,H] = 0$ είτε με πίνακες ή με αναπαράσταση Dirac

Σημειώ $H = (\varepsilon+\delta)|+\rangle\langle +| - (\varepsilon-\delta)|-\rangle\langle -|$ $K = 0|-\rangle\langle -| + 2k|+\rangle\langle +|$

$HK - KH = \left[(\varepsilon+\delta)|+\rangle\langle +| - (\varepsilon-\delta)|-\rangle\langle -|\right]\left(2k|+\rangle\langle +|\right) - \left(2k|+\rangle\langle +|\right)\left[(\varepsilon+\delta)|+\rangle\langle +| - (\varepsilon-\delta)|-\rangle\langle -|\right] =$

$= (\varepsilon+\delta)2k|+\rangle\langle +| - 2k(\varepsilon+\delta)|+\rangle\langle +| = 0$.