ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ (Α.Π.Δ) 3/11/17

$x_{ii} = (\psi_i, x\psi_i) =$ λόγω συμμετρίας στην μέση του πηγαδιού

$\langle x \rangle$ μέσο x, για κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t) = \psi_i$ (στάσιμη κατάσταση)

Άρα $x_{ii} = \frac{L}{2}$ για άσυμμετρο και 0 για συμμετρικό

Επίσης $p_{ii} = (\psi_i, \hat{p}\psi_i) = 0$ γατί p_{ii} μέση ορμή $\psi(x,t) = \psi_i$ (στάσιμη) και στο Α.Π.Δ. ψ_i πραγματική ιδιοσυνάρτηση

Υπολογισμοί x_{21} & p_{21}

ΑΠΔ $[0, L]$ $x_{21} = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) = \frac{1}{L}\int x\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx - \frac{1}{L}\int x\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\left(\frac{-2L^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right) = -\frac{16L}{9\pi^2}$

ΑΠΔ $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ $x_{21} = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\int x\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)dx + \frac{1}{L}\int x\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{1}{L}\frac{L^2}{\pi^2}\left(2 - \frac{3}{9}\right) = +\frac{16L}{9\pi^2}$

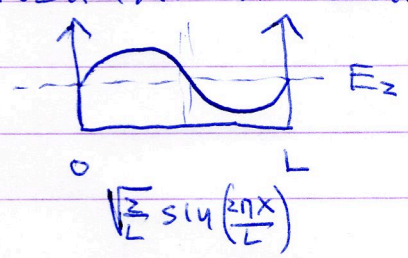
$[0, L]$ $p_{21} = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\left(-i\hbar\frac{2}{\partial x}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)dx = -\frac{i\hbar}{L}\frac{\pi}{L}\int 2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{-i\hbar\pi}{L^2}\int\left(\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)dx =$

$= -\frac{i\hbar}{L}\left(\frac{2}{3} + 2\right) = -\frac{i8\hbar}{3L} = \frac{8\hbar}{3L}e^{-i\pi/2} \rightarrow |p_{21}| = 8\hbar/3L \;\&\; p_{21}^p = -\pi/2$

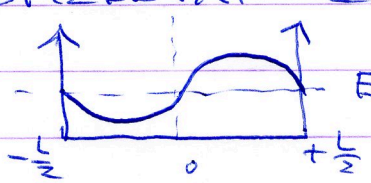
$[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$ $p_{21} = \frac{2}{L}\int_{-L/2}^{L/2} \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\left(-i\hbar\frac{2}{\partial x}\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)dx = \frac{i\hbar\pi}{L^2}\int 2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)dx = \frac{i\hbar\pi}{L^2}\int\left(\left(\cos\left(\frac{3\pi x}{L}\right) - \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)dx\right.$

$= \frac{i\hbar}{L}\left(2 + \frac{2}{3}\right) = +i\frac{8\hbar}{3L} \rightarrow |p_{21}| = \frac{8\hbar}{3L} \;\&\; p_{21}^p = +\pi/2 \quad (e^{i\pi/2} = i)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΟΥΜΕ ΟΤΙ ΤΑ x_{21} ΚΑΙ p_{21} ΣΤΟ $[0, L]$ ΚΑΙ ΣΤΟ ΣΥΜΜΕΤΡΙΚΟ ΠΗΓΑΔΙ $[-\frac{L}{2}, +\frac{L}{2}]$ ΕΧΟΥΝ ΑΚΡΙΒΩΣ ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΠΡΟΣΗΜΑ. Η ΕΞΗΓΗΣΗ ΒΡΙΣΚΕΤΑΙ ΣΤΟ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΣΧΗΜΑ



$\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$



$\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$

Τώρα καθώς $\langle x \rangle(t) = |c_1|^2 x_{11} + |c_2|^2 x_{22} + 2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\omega t + \phi_{12} + p_{21}^x) =$

$= 2|c_1||c_2|\frac{16L}{9\pi^2}\cos(\omega t + \phi_{12} + 0) = \frac{32L}{9\pi^2}|c_1||c_2|\cos(\omega t + \phi_{12})$

(όπου χρησιμοποιήσαμε την πληροφορία $x_{21} = |x_{21}|e^{ip_{21}^x} = \frac{16L}{9\pi^2}e^{i0}$)

και $\langle p \rangle(t) = |c_1|^2 p_{11} + |c_2|^2 p_{22} + 2|c_1||c_2||p_{21}|\cos(\omega t + \phi_{12} + p_{21}^p) = \frac{16\hbar}{3L}|c_1||c_2|\cos(\omega t + \phi_{12} + \frac{\pi}{2})$

$= -\frac{16\hbar}{3L}|c_1||c_2|\sin(\omega t + \phi_{12})$

Άρα $\frac{\langle p \rangle(t)}{\langle x \rangle(t)} = -\frac{3}{2}\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\hbar\tan(\omega t + \phi_{12})$

όπου $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{3\hbar\pi^2}{2mL^2}$

Επαληθεύουμε ότι $\frac{d\langle x \rangle(t)}{dt} = \frac{\langle p \rangle(t)}{m}$ ("κλασική" φυσική για μέσες τιμές)

Πάτρα, 10/11/17

Α. Φ. Τσορτσή