ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι (ΕΝΙΣΧΥΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ)

3 Νοέμβρη 2017 (Διδάσκων: Αντρέας Φ. Τερζής)

ΘΕΜΑ 1[1+1+0.5+0.5] ***Μοντέλο Bohr για άτομο υδρογόνου και υδρογονοειδή ιόντα. Σχετικιστική επέκταση.***

Στο πρότυπο Bohr ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις για την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς και την ταχύτητα του ηλεκτρονίου, $r_n = \frac{\hbar^2}{Ze^2 m} n^2$, $u_n = \frac{Ze^2}{\hbar}\frac{1}{n}$,.

(1α) Να αποδείξετε ότι για την ενέργεια ενός υδρογονοειδούς ιόντος ισχύει $E_n = -\frac{mZ^2e^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$.

(1β) Αν γνωρίζουμε ότι $\frac{me^4}{2\hbar^2} \sim 13{,}6\ eV$, να αποδείξετε ότι οι γραμμές Balmer (ορατή ακτινοβολία) αντιστοιχούν σε μεταβάσεις στην στάθμη n=2. Στην επιχειρηματολογία σας αν σας βολεύει, μπορείτε να χρησιμοποιήσετε την σχέση $\lambda(nm) = \frac{1240}{E(eV)}$

(1γ) Να αποδείξετε ότι οι ενεργειακές καταστάσεις του «εξωτικού» ατόμου του positronium, υπολογίζονται από την σχέση, $E_n \sim -\frac{6{,}8(eV)}{n^2}$

(1δ) Να αποδείξετε ότι ισχύει η σχέση $\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{m}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\frac{d\vec{u}}{dt}$, στην σχετικιστική επέκταση του μοντέλου του Bohr.

ΘΕΜΑ 2[1] ***Υλικά κύματα.*** Θεωρούμε πρωτόνιο κινητικής ενέργειας ίσης με το 80% της ενέργειας του στην ηρεμία. Να υπολογιστεί το μήκος κύματος de Broglie, αν γνωρίζουμε ότι η ενέργειας του στην ηρεμία είναι περίπου $1GeV$.

ΘΕΜΑ 3[0.5+0.5] ***Εξίσωση Schrödinger.*** Εξηγείστε γιατί η κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t) = i\sin(kx)\cos(\omega t)$ δεν μπορεί να περιγράφει ένα πραγματικό φυσικό κβαντικό σύστημα

(3α) Χρησιμοποιώντας την χρονο-εξαρτώμενη εξίσωση του Schrödinger.

(3β) Χρησιμοποιώντας την φυσική σημασία της κυματοσυνάρτησης $\left(P(x,t)dx \equiv |\psi(x,t)|^2 dx\right)$.

ΘΕΜΑ 4[0.5+0.5+0.5+0.5+1] ***Μέσες τιμές και αβεβαιότητες θέσης και ορμής.***

Έστω ότι η κυματοσυνάρτηση ενός κβαντικού σωματιδίου είναι $\psi(x) = |N| x e^{(-x^2/2)}$

(4α) Να βρεθεί η σταθερά $|N|$.

(4β) Να βρεθεί η μέση θέση του σωματιδίου.

(4γ) Να βρεθεί το $\langle x^2 \rangle$ του σωματιδίου.

(4δ) Να βρεθεί η μέση ορμή του σωματιδίου.

(4ε) Να αποδείξετε ότι $\Delta x \Delta p = k \cdot \hbar$ και να βρείτε την τιμή του k.

Υπόδειξη:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}},\quad \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-cx^2}dx = \frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{(2c)^n}\sqrt{\frac{\pi}{c}}$$

ΘΕΜΑ 5[1+1] ***Ερμιτιανοί τελεστές και συζυγής τελεστή .***

(5α) Από την σχέση ορισμού της ερμιτιανότητας να αποδείξετε ότι ο τελεστής xp_y είναι ερμιτιανός.

(5β) Χρησιμοποιώντας τον συζυγή τελεστή να ελέγξετε αν ο τελεστής $xp_y + xp_z x$ είναι ερμιτιανός.

ΘΕΜΑ 6[0.25+0.25+0.5] ***Πρόβλημα ιδιοτιμών ενέργειας(ΠΙΕ). Απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού (ΑΠΔ).***

Ηλεκτρόνιο μάζας m βρίσκεται σε δυναμικό $V(x)=\begin{bmatrix} 0, & |x|\le L \\ \infty, & |x|>L \end{bmatrix}$.

(6α) Να γράψετε την έκφραση για τις ιδιοτιμές της ενέργειας, και **(6β)** τις ιδιοσυναρτήσεις για τις άρτιες ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας.

Θεωρούμε ότι πολύ απότομα, το ενεργειακά απομονωμένο κβαντικό σύστημα, αποκτά διπλάσιο εύρος.

(6γ) Αν στο αρχικό σύστημα το ηλεκτρόνιο ήταν στην θεμελιώδη κατάσταση, σε ποια θα βρεθεί μετά την επιμήκυνση.

ΘΕΜΑ 7[1] ***ΠΙΕ και ΑΠΔ.***

Να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν ένα σωμάτιο περιορισμένο σε μονοδιάστατο κβαντικό «σύρμα» να είναι ακίνητο, λύνοντας την χρονοανεξάρτητη εξίσωση Schrödinger.

ΘΕΜΑ 8[0.5+0.5] ***Γενική μορφή κυματοσυνάρτησης.***

Ηλεκτρόνιο μάζας m βρίσκεται περιορισμένο σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού (ΑΠΔ) πάχους L.
Η κατάσταση του ηλεκτρονίου την χρονική στιγμή t=0, περιγράφεται, από την κυματοσυνάρτηση,

$\psi(x)=\dfrac{\psi_1(x)+i\cdot\psi_3(x)}{\sqrt{2}}$, όπου $\psi_n(x)$ οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας του ΑΠΔ.

(8α) Να βρεθεί η χρονοεξαρτώμενη κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)$

(8β) Να βρεθεί η αβεβαιότητα της ενέργειας του ηλεκτρονίου.

ΘΕΜΑ 9 [1.5] ***Σύστημα δύο ενεργειακών καταστάσεων.***

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές του καταστάσεις σε δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού, ~~εύρους L (όπως στο Θέμα 6)~~.
Αν δίνεται ότι την χρονική στιγμή $t=0$, έχει μηδενική μέση ορμή και η μέση θέση του είναι $\dfrac{L}{2}\left(1-\dfrac{32}{9\pi^2}\right)$, να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του συστήματος.

Υπόδειξη:

Χρήσιμες τριγωνομετρικές σχέσεις

$2\sin A\sin B=\cos(A-B)-\cos(A+B)$

$2\sin A\cos B=\sin(A+B)+\sin(A-B)$

$2\cos A\cos B=\cos(A+B)+\cos(A-B)$

Χρήσιμες Φυσικές σταθερές, $h=6,626\times10^{-34}\,J\cdot s,\ m_e=9,1\times10^{-31}\,kg,\ e=1,6\times10^{-19}\,C.$

++

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΓΙΑ ΤΟ ΣΠΙΤΙ (ΝΑ ΠΑΡΑΔΟΘΕΙ ΤΡΙΤΗ 7/11 ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ)

[0.5 επιπλέον στον τελικό βαθμό, σε συνδυασμό με προφορική εξέταση]

ΘΕΜΑ, ***Σύστημα δύο ενεργειακών καταστάσεων.***

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές του καταστάσεις σε συμμετρικό δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού, εύρους L.

Δηλαδή $\psi(x,t=0)=|c_1|\cdot e^{i\varphi_{12}}\cdot\psi_1(x)+|c_2|\psi_2(x)$.

Να υπολογιστεί ο λόγος $\langle p\rangle(t)/\langle x\rangle(t)$ συναρτήσει των φυσικών σταθερών του συστήματος και των συντελεστών της κυματοσυνάρτησης ($|c_1|$, $|c_2|$ και φ_{12}).

Καλή επιτυχία