ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

1η Πρόοδος: 20 Νοέμβρη 2017 (Διδάσκων: Αντρέας Φ. Τερζής)

ΘΕΜΑ 1[0.25+0.5+0.25+0.5] 1Ο ΘΕΜΑ, ΕΞΕΤΑΣΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΗΣ 2017

(1α) Εξηγείστε αν ο μεταθέτης δύο ερμιτιανών τελεστών είναι ερμιτιανός τελεστής.

(1β) Να δείξετε ότι ο τελεστής $yp_z x + xp_x x$ είναι ερμιτιανός τελεστής.

(1γ) Χρησιμοποιώντας την σχέση $i\hbar\frac{d\langle A\rangle}{dt} = \langle [A,H] \rangle$ να αποδείξτε ότι ο μεταθέτης $[A,H]$ *δεν* είναι ερμιτιανός τελεστής.

(1δ) Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του $\Delta x \Delta l_y$.

ΘΕΜΑ 2[2] Έστω ότι η κυματοσυνάρτηση ενός κβαντικού σωματιδίου είναι $\psi(x) = |N| e^{\left(-x^2/2\right)}$ ΕΧΕΙ ΔΙΔΑΧΘΕΙ ΦΕΤΟΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ

Να βρεθεί το $\Delta x \Delta p$. *Υπόδειξη:* $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{c}}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-cx^2} dx = \frac{1\cdot 3 \cdots (2n-1)}{(2c)^n}\sqrt{\frac{\pi}{c}}$ $(\Delta x)(\Delta p) = \frac{\hbar}{2}$

ΘΕΜΑ 3[0.25+0.25+0.5+0.5]

Ηλεκτρόνιο μάζας *m* βρίσκεται σε δυναμικό $V(x) = \begin{cases} 0, & |x| \le L \\ \infty, & |x| > L \end{cases}$.

(3α) $\psi_n = \sqrt{\frac{2}{2L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$ (για $|x| \le L$)

$= \frac{1}{\sqrt{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{2L}\right)$ n: άρτιος

(3α) Να γράψετε την έκφραση για τις ιδιοτιμές της ενέργειας, και **(3β)** τις ιδιοσυναρτήσεις για τις περιττές ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας. n: άρτιος.

Η κατάσταση του ηλεκτρονίου την χρονική στιγμή *t*=0, περιγράφεται, από την κυματοσυνάρτηση, $\psi(x) = \frac{\psi_1(x) + i\cdot\psi_3(x)}{\sqrt{2}}$, όπου $\psi_n(x)$ οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας του.

(3ε) $E_n = \frac{\hbar^2\pi^2}{2m(2L)^2} n^2 = \frac{\hbar^2\pi^2 n^2}{8mL^2}$

(3γ) Να βρεθεί η χρονοεξαρτώμενη κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)$.

(3δ) $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{i}{\sqrt{2L}} \cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) e^{-iE_3 t/\hbar}$

(3δ) Να βρεθεί η αβεβαιότητα της ενέργειας του ηλεκτρονίου.

(3ζ) $P_1 = P_3 = \frac{1}{2} \rightarrow (\Delta E) = \frac{(E_3 - E_1)}{2} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$

ΘΕΜΑ 4 [1+1]

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές του καταστάσεις σε δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού, εύρους L (περιοχή $[0, L]$). $\langle E \rangle = |c_1|^2 \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} + |c_2|^2 \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} 4 = \frac{7}{4}\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \rightarrow |c_1|^2 + 4|c_2|^2 = \frac{7}{4}$ & $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$

Άρα $|c_2|^2 = 1/4$ & $|c_1|^2 = 3/4$ $\rightarrow$ $|c_1| = \sqrt{3}/2$, $|c_2| = 1/2$

Αν δίνεται ότι την χρονική στιγμή $t = 0$, έχει μέση ορμή $\frac{2\hbar}{\sqrt{3}L}$ και μέση ενέργεια $\frac{7\hbar^2\pi^2}{8mL^2}$ και είναι γνωστό ότι

Άτομα $\langle p \rangle(t=0) = 2|c_1||c_2||p_{21}|\cos(\varphi_{12} + \rho^p_{21})$ $p_{21} = \frac{8\hbar}{3L} e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\frac{8\hbar}{3L}\sin\varphi_{12} = \frac{2\hbar}{\sqrt{3}L}$

$x_{21} = -\frac{16L}{9\pi^2}$ και $p_{21} = -\frac{8\hbar}{3L} i$ $\rightarrow \sin\varphi_{12} = \frac{1}{2} \rightarrow \varphi_{12} = \frac{\pi}{6}$ Άρα

(4α) Να βρεθεί η χρονοεξαρτώμενη κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)$. $\psi(x,t) = \frac{e^{i\pi/6}}{2}\psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{2}\psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}$

(4β) Να βρεθεί η χρονοεξαρτώμενη μέση θέση του ηλεκτρονίου.

$\langle x \rangle(t) = \frac{L}{2} + 2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\omega t + \varphi_{12} + \rho^x_{21})$ $x_{21} = \frac{16L}{9\pi^2} e^{i\pi}$ $\frac{L}{2} - \frac{8}{3\sqrt{3}}\frac{L}{\pi^2}\cos(\omega t + \frac{\pi}{6})$

ΘΕΜΑ 5[1+0.5+0.5+0.5+0.25+0.25] ΘΕΜΑ 2Ο ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΗ ΣΕΠΤΕΜΒΡΗ 2017

Θεωρούμε κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από Χαμιλτονιανή *H*, η οποία σε μορφή πίνακα χρησιμοποιώντας τις ιδιοσυναρτήσεις $|1\rangle$, $|2\rangle$ και $|3\rangle$ ενός ερμιτιανού τελεστή *W*, είναι $H = \begin{bmatrix} \varepsilon & -\sqrt{2}\varepsilon & 0 \\ -\sqrt{2}\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$.

(5α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας.

Θεωρούμε ένα φυσικό μέγεθος που περιγράφεται από τον τελεστή *W*, όπου $W = w\left(|1\rangle\langle 1| - |3\rangle\langle 3|\right)$ με w πραγματικό.

Την χρονική στιγμή *t*=0, μετράμε το φυσικό μέγεθος που σχετίζονται με τον τελεστή *W* και βρίσκουμε μηδενική τιμή.

(5β) Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$.

(5γ) Να υπολογιστεί η χρονοεξαρτώμενη μέση τιμή, $\langle W \rangle(t)$.

(5δ) Αν την χρονική στιγμή t μετρήσω το φυσικό μέγεθος που σχετίζονται με τον τελεστή *W*, ποιες είναι οι δυνατές μετρούμενες τιμές και με ποιες πιθανότητες;

Να υπολογίσετε τον ρυθμό μεταβολής της μέσης τιμής του *W* χρησιμοποιώντας,

(5ε1) την χρονοεξαρτώμενη κυματοσυνάρτηση

(5ε2) την μέση τιμή του μεταθέτη των *W* και *H*.

Καλή επιτυχία