ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΠΡΟΟΔΟΣ: 21 Νοέμβρη 2016 (Διδάσκων: Α.Φ. Τερζής)

ΘΕΜΑ 1 [3+2]

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται περιορισμένο σε περιοχή $[0, L]$(απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού πάχους L).

Το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις του με $\langle E\rangle = \frac{5h^2\pi^2}{4mL^2}$ και $\langle p\rangle = -\frac{8h}{3L}$ για $t=0$.

Να βρεθούν **(α)** η χρονοεξαρτώμενη κυματοσυνάρτηση του συστήματος, $\Psi(x,t)$, και **(β)** η μέση χρονοεξαρτώμενη θέση του $\langle x\rangle(t)$ χρησιμοποιώντας είτε τον τύπο της μέσης τιμής $\langle x\rangle(t) = |c_a|^2 x_{aa} + |c_b|^2 x_{bb} + 2|c_a||c_b||x_{ba}|\cos(\omega t + \varphi_{ab} + \delta)$, ή την σχέση ορισμού $\langle x\rangle(t) \equiv (\Psi(x,t), \hat{x}\Psi(x,t))$.

(α) $\Psi(x,t) = |c_\alpha| e^{i\varphi_{\alpha\beta}} \psi_\alpha e^{-iE_\alpha t/\hbar} + |c_\beta| \psi_\beta e^{-iE_\beta t/\hbar}$ $(\alpha=1, \beta=2)$

Από μέση ενέργεια $P_1 = P_2 = \frac{1}{2} \to |c_1| = |c_2| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (εκτή διδαχθείσα εξίσωση)

$\langle p\rangle(t) = 2|c_\alpha||c_\beta||p_{\beta\alpha}|\cos(\omega t + \varphi_{\alpha\beta} + \delta)$. Στο μάθημα είδαμε $p_{21} = -\frac{2\hbar i}{3L}$

Οπότε $\langle p\rangle(t=0) = -\frac{2\hbar}{3L} = \frac{2\hbar}{3L}\cos(\varphi_{\alpha\beta} + \frac{\pi}{2})$, καθώς $p_{21} = -\frac{2\hbar i}{3L} = \frac{2\hbar}{3L} e^{-i\frac{\pi}{2}}$ $(\delta = -\frac{\pi}{2})$

Δηλαδή $\sin(\varphi_{\alpha\beta}) = -1 \to \varphi_{\alpha\beta} = -\frac{\pi}{2}$.

Άρα $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(-\frac{\pi}{2})} \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} = \frac{-i}{\sqrt{2}} \psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar}$

(β) 1η μέθοδος $\langle x\rangle(t) = |c_1|^2 x_{11} + |c_2|^2 x_{22} + 2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\omega t - \frac{\pi}{2} + \delta') =$

$= \frac{1}{2}\frac{L}{2} + \frac{1}{2}\frac{L}{2} + |x_{21}|\sin(\omega t + \delta')$.

$x_{21} = (\psi_2, \hat{x}\psi_1) = \frac{2}{L}\int_0^L x \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) = \frac{-16L}{9\pi^2}$

Άρα $x_{21} = \frac{16L}{9\pi^2} e^{i\pi}$ $(\delta' = \pi)$ $\Rightarrow \langle x\rangle(t) = \frac{L}{2} - \frac{16L}{9\pi^2}\sin\omega t$ $\left(\omega = (E_2 - E_1)/\hbar\right)$.

2η μέθοδος Ισοδύναμη κυματοσυνάρτηση $\tilde{\Psi}(x,t) = \frac{-i\psi_1 e^{i\omega t} + \psi_2}{\sqrt{2}}$

$\langle x\rangle(t) = (\tilde{\Psi}(x,t), \hat{x}\tilde{\Psi}(x,t)) = \left(\frac{-i\psi_1 e^{i\omega t} + \psi_2}{\sqrt{2}}, \hat{x}\frac{(-i\psi_1 e^{i\omega t} + \psi_2)}{\sqrt{2}}\right) =$

$= \frac{1}{2}(-i\psi_1 e^{i\omega t}, -ix\psi_1 e^{i\omega t}) + \frac{1}{2}(-i\psi_1 e^{i\omega t}, x\psi_2) + \frac{1}{2}(\psi_2, -ix\psi_1 e^{i\omega t}) + \frac{1}{2}(\psi_2, x\psi_2) =$

$= \frac{1}{2}(\psi_1, x\psi_1) + \frac{i}{2}e^{-i\omega t}(\psi_1, x\psi_2) - \frac{i}{2}e^{i\omega t}(\psi_2, x\psi_1) + \frac{1}{2}(\psi_2, x\psi_2) =$

$= \frac{x_{11}}{2} + \frac{i}{2}e^{-i\omega t}x_{12} - \frac{i}{2}e^{i\omega t}x_{21} + \frac{x_{22}}{2} = \left(\begin{matrix} x_{21} = |x_{21}|e^{i\delta'} \\ x_{12} = x_{21}^* \end{matrix}\right) = \frac{x_{11}+x_{22}}{2} + |x_{21}|\frac{e^{i\omega t + i\delta'} - e^{-i\omega t - i\delta'}}{2i}$

$= \frac{x_{11}+x_{22}}{2} - |x_{21}|\sin\omega t = \frac{L}{2} - \frac{16L}{9\pi^2}\sin\omega t$

ΘΕΜΑ 2 [0.5+2+1.5+1]

Θεωρούμε κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από Χαμιλτονιανή H, της μορφής $H = \varepsilon\left[|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right] + \varepsilon|1\rangle\langle 2| + r|2\rangle\langle 1|$, όπου $|1\rangle$, $|2\rangle$ ιδιοσυναρτήσεις ερμιτιανού τελεστή W μορφής σε πίνακα $W = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} w$ με ε, w θετικοί πραγματικοί. **(α)** Να αποδειχθεί ότι $r = \varepsilon$. **(β)** Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας. Η μέτρηση του φυσικού μεγέθους που σχετίζονται με τον τελεστή W την χρονική στιγμή t=0, δίνει θετική τιμή. Να βρεθούν **(γ)** η χρονοεξαρτώμενη κυματοσυνάρτηση του συστήματος, $\Psi(x,t)$, και **(δ)** η μέση χρονοεξαρτώμενη τιμή, $\langle W\rangle(t)$.

(α) $H_{21} = H_{12}^*$ (ερμιτιανός τελεστής η $\hat{H}$) $\rightarrow H_{21} = \varepsilon^* = \varepsilon \rightarrow r = \varepsilon$

(β) $H = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$ Διαγωνοποίηση $\det\begin{bmatrix} \varepsilon-\lambda & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (\varepsilon-\lambda)^2 - \varepsilon^2 = 0 \rightarrow \lambda(\lambda - 2\varepsilon) = 0$

$\lambda = 0$ & $\lambda = 2\varepsilon$ Ιδιοτιμές ενέργειας.

$\lambda = 0$ $\begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow y_0 = -x_0$ & $|x_0|^2 + |y_0|^2 = 1 \rightarrow x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $y_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Αρα $|0\rangle = \frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}$

$\lambda = 2\varepsilon$ $\begin{bmatrix} \varepsilon-2\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon-2\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{2\varepsilon} \\ y_{2\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -\varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & -\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{2\varepsilon} \\ y_{2\varepsilon} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow y_{2\varepsilon} = x_{2\varepsilon} \rightarrow x_{2\varepsilon} = y_{2\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Αρα $|2\varepsilon\rangle = \frac{|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{2}}$

(γ) Αφού $W = \begin{bmatrix} w & 0 \\ 0 & -w \end{bmatrix}$, η θετική τιμή ($w$) αντιστοιχεί στην $|1\rangle$

Αρα $\Psi(x,0) = |1\rangle$

Οπότε $\Psi(x,t) = c_0|0\rangle e^{-i\omega_0 t/\hbar} + c_{2\varepsilon}|2\varepsilon\rangle e^{-i 2\varepsilon t/\hbar}$, με $c_0 = \langle 0|\Psi(x,0)\rangle = \langle 0|1\rangle = \frac{\langle 1|1\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{\langle 2|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

& $c_{2\varepsilon} = \langle 2\varepsilon|\Psi(x,0)\rangle = \langle 2\varepsilon|1\rangle = \frac{\langle 1|1\rangle + \langle 2|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Έτσι $|\Psi(x,0)\rangle = \frac{|0\rangle + |2\varepsilon\rangle e^{-2i\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}}$

$\omega = \frac{2\varepsilon - 0}{\hbar} = 2\varepsilon/\hbar$

$\phi_{0,2\varepsilon} = 0$

(δ) $\langle W\rangle(t) = |c_0|^2 W_{0,0} + |c_{2\varepsilon}|^2 W_{2\varepsilon,2\varepsilon} + 2|c_0||c_{2\varepsilon}||W_{2\varepsilon,0}|\cos(\omega t + \phi_{0,2\varepsilon} + \delta)$

$= \frac{W_{0,0} + W_{2\varepsilon,2\varepsilon}}{2} + |W_{2\varepsilon,0}|\cos(\omega t + \delta)$

$W_{0,0} = \langle 0|\hat{W}|0\rangle = \left(\frac{\langle 1| - \langle 2|}{\sqrt{2}}\right)\hat{W}\left(\frac{|1\rangle - |2\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\langle 1|W|1\rangle - \langle 1|W|2\rangle - \langle 2|W|1\rangle + \langle 2|W|2\rangle}{2}$

$= \frac{W_{11} - W_{12} - W_{21} + W_{22}}{2} = \frac{w - 0 - 0 - w}{2} = 0$

$W_{2\varepsilon,2\varepsilon} = \langle 2\varepsilon|\hat{W}|2\varepsilon\rangle = \dots = \frac{W_{11} + W_{12} + W_{21} + W_{22}}{2} = 0$

$W_{2\varepsilon,0} = \langle 2\varepsilon|\hat{W}|0\rangle = \frac{(\langle 1| + \langle 2|)(\hat{W}|1\rangle - \hat{W}|2\rangle)}{2} = \frac{W_{11} - W_{12} + W_{21} - W_{22}}{2}$

$= \frac{w + w}{2} = w$ Αρα $|W_{2\varepsilon,0}| = w$, $\delta = 0$

$\langle W\rangle(t) = w\cos(\omega t) = w\cos(2\varepsilon t/\hbar)$