ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

Τελική Εξέταση: 5 Σεπτέμβρη 2016 (Διδάσκων: Α.Φ. Τερζής)

ΘΕΜΑ 1

Θεωρούμε κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από Χαμιλτονιανή *H*, η οποία σε μορφή πίνακα χρησιμοποιώντας τις ιδιοσυναρτήσεις $|1\rangle$, $|2\rangle$ και $|3\rangle$ κάποιου ερμιτιανού τελεστή είναι

$$H=\begin{bmatrix}1 & \sqrt{2} & 0\\ \sqrt{2} & 1 & -\sqrt{2}\\ 0 & -\sqrt{2} & 1\end{bmatrix}\varepsilon$$, όπου ε πραγματικός.

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας.

Θεωρούμε φυσικό μέγεθος που περιγράφεται από τον τελεστή *W*, με $W = w\left[|1\rangle\langle 3| + |3\rangle\langle 1|\right]$, όπου *w* πραγματικός.

(β) Για ποια μέτρηση του φυσικού μεγέθους που σχετίζονται με τον τελεστή *W* την χρονική στιγμή *t*=0, το κβαντικό σύστημα περιγράφεται από στάσιμη κατάσταση;

Αν η πιθανότητα μέτρησης της μηδενικής ιδιοτιμής του τελεστή *W* είναι $P_{|0\rangle}(t)=\cos^2\left(2\varepsilon t/\hbar\right)$.

(γ) Να βρεθεί η χρονοεξαρτώμενη πιθανότητα μέτρησης της θετικής ιδιοτιμής του τελεστή *W*.

(α) Για την εύρεση βρεθούν των ιδιοτιμών και τα ιδιοδιανυσμάτων του τελεστή της ενέργειας, διαγωνοποιούμε την Χαμιλτονιανή, δηλαδή $\det\begin{bmatrix}\varepsilon-\lambda & \sqrt{2}\varepsilon & 0\\ \sqrt{2}\varepsilon & \varepsilon-\lambda & -\sqrt{2}\varepsilon\\ 0 & -\sqrt{2}\varepsilon & \varepsilon-\lambda\end{bmatrix}=0$.

$$(\varepsilon-\lambda)^3-4(\varepsilon-\lambda)\varepsilon^2=(\varepsilon-\lambda)\left((\varepsilon-\lambda)^2-4\varepsilon^2\right)=(\lambda+\varepsilon)(\varepsilon-\lambda)(\lambda-3\varepsilon)\Rightarrow \lambda_{1,2,3}=-\varepsilon,\varepsilon,3\varepsilon$$

Ιδιοσυνάρτησεις,

$$\lambda_1=-\varepsilon,\begin{bmatrix}2\varepsilon & \sqrt{2}\varepsilon & 0\\ \sqrt{2}\varepsilon & 2\varepsilon & -\sqrt{2}\varepsilon\\ 0 & -\sqrt{2}\varepsilon & 2\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow y_1=-\sqrt{2}x_1, z_1=-x_1$$, ενώ από την κανονικοποίηση έχουμε $|x_1|^2+|y_1|^2+|z_1|^2=1\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{bmatrix}=|-\varepsilon\rangle=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{2}\\ -1\end{bmatrix}$.

Ανάλογα για $\lambda_3=3\varepsilon,\begin{bmatrix}-2\varepsilon & \sqrt{2}\varepsilon & 0\\ \sqrt{2}\varepsilon & -2\varepsilon & -\sqrt{2}\varepsilon\\ 0 & -\sqrt{2}\varepsilon & -2\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_3\\ y_3\\ z_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow y_3=\sqrt{2}x_3, z_3=-x_3$, ενώ από την κανονικοποίηση έχουμε $|x_3|^2+|y_3|^2+|z_3|^2=1\Rightarrow\begin{bmatrix}x_3\\ y_3\\ z_3\end{bmatrix}=|3\varepsilon\rangle=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\\ -1\end{bmatrix}$.

Τέλος για $\lambda_2=\varepsilon,\begin{bmatrix}0 & \sqrt{2}\varepsilon & 0\\ \sqrt{2}\varepsilon & 0 & -\sqrt{2}\varepsilon\\ 0 & -\sqrt{2}\varepsilon & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}\Rightarrow y_2=0, z_2=x_2$, ενώ από την κανονικοποίηση έχουμε $|x_2|^2+|y_2|^2+|z_2|^2=1\Rightarrow\begin{bmatrix}x_2\\ y_2\\ z_2\end{bmatrix}=|\varepsilon\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 0\\ 1\end{bmatrix}$.

(β) Διαγωνοποιώντας τον *W*, βρίσκουμε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του, δηλαδή $\det\begin{bmatrix} -\lambda & 0 & w \\ 0 & -\lambda & 0 \\ w & 0 & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + -\lambda w^2 = \lambda\left(\lambda + \varepsilon\right)\left(\lambda - \varepsilon\right) = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2,3} = -w, 0, w.$

Ιδιοσυνάρτησεις,

$\lambda_1 = -w, \begin{bmatrix} w & 0 & w \\ 0 & w & 0 \\ w & 0 & w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y_1 = 0, z_1 = -x_1,$ ενώ από την κανονικοποίηση έχουμε

$|\mathrm{x}_1|^2 + |y_1|^2 + |z_1|^2 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = |-w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \text{-1} \end{bmatrix}.$

Ανάλογα για $\lambda_3 = w, \begin{bmatrix} -w & 0 & w \\ 0 & -w & 0 \\ w & 0 & -w \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow y_3 = 0, z_3 = x_3,$ ενώ από την κανονικοποίηση

έχουμε $|\mathrm{x}_3|^2 + |y_3|^2 + |z_3|^2 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = |w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$

Τέλος για $\lambda_2 = 0, \begin{bmatrix} 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 \\ w & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow z_2 = x_2 = 0,$, ενώ από την κανονικοποίηση έχουμε

$|\mathrm{x}_2|^2 + |y_2|^2 + |z_2|^2 = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = |0\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\left(= |2\rangle\right)..$

Παρατηρούμε ότι η ιδιοτιμή του τελεστή *W*, +*w* έχει ίδια ιδιοσυνάρτηση με τον ιδιοτιμή της ενέργειας *ε*. Άρα αν η μέτρηση του φυσικού μεγέθους που σχετίζονται με τον τελεστή *W* την χρονική στιγμή *t*=0 είναι +*w*, το κβαντικό σύστημα περιγράφεται από στάσιμη κατάσταση. Την $|\Psi(x,t)\rangle = |w\rangle = |\varepsilon\rangle.$

(γ) Αφού $P_{|0\rangle}(t) = \cos^2\left(2\varepsilon t/\hbar\right)$ για *t*=0 $P_{|0\rangle}(t=0) = 1$ και $|\Psi(x, t=0)\rangle = |0\rangle = |2\rangle.$

Έτσι η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$, είναι

$|\Psi(x,t)\rangle = \langle -\varepsilon|2\rangle e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}|-\varepsilon\rangle + \langle\varepsilon|2\rangle e^{-\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}|\varepsilon\rangle + \langle 3\varepsilon|2\rangle e^{-\frac{3i\varepsilon t}{\hbar}}|3\varepsilon\rangle = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}|-\varepsilon\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3i\varepsilon t}{\hbar}}|3\varepsilon\rangle,$ και

$P_{|w\rangle}(t) = \left|\langle w|\Psi(x,t)\rangle\right|^2 = \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}\langle w|-\varepsilon\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3i\varepsilon t}{\hbar}}\langle w|3\varepsilon\rangle\right|^2 = \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{i\varepsilon t}{\hbar}}0 + \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{3i\varepsilon t}{\hbar}}0\right|^2 = 0.$

ΘΕΜΑ 2

Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του $\Delta\left(l_x - xp_y\right)\cdot\Delta z$.

$\Delta\left(l_x - xp_y\right)\cdot\Delta z \geq \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\left(l_x - xp_y\right), z\right]\right\rangle\right| = \frac{1}{2}\left|\left\langle\left[\left(yp_z - zp_y - xp_y\right), z\right]\right\rangle\right| = \frac{1}{2}\left|\langle[yp_z, z]\rangle\right| = \frac{\hbar}{2}\left|\langle y\rangle\right|.$

ΘΕΜΑ 3

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού πάχους L. Θεωρούμε ότι το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στην $1^{η}$ διεγερμένη ενεργειακή κατάσταση. Ξαφνικά αυξάνουμε το πάχος του πηγαδιού κατά 50%.

Η γενική μορφή της κυματοσυνάρτησης είναι $\Psi(x,t)=\sum_n c_n\psi_n(x)e^{-iE_nt/\hbar}$.

Να γράψετε την μορφή του ολοκληρώματος από το οποίο υπολογίζεται ο συντελεστής c_1.

Από την υπόδειξη έχουμε ιδιοσυναρτήσεις απειρόβαθου πηγαδιού δυναμικού πάχους L, $\psi_n^{L}(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi x}{L})\cdot\Theta(x)\cdot\Theta(L-x)$ και πηγαδιού πάχους $1.5L$, $\psi_n^{3L/2}(x)=\frac{2}{\sqrt{3L}}\sin(\frac{2n\pi x}{3L})\cdot\Theta(x)\cdot\Theta(3L/2-x)\cdot$

Οι συντελεστές c_n υπολογίζονται από τις σχέσεις, $c_n=\left(\psi_n^{3L/2}(x),\Psi(x,t=0)\right)$, όπου αρχική κατάσταση $1^{η}$ διεγερμένη (n=2), άρα $\Psi(x,t=0)=\psi_2^{L}(x)=\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{2\pi x}{L})\cdot\Theta(x)\cdot\Theta(L-x)\cdot$

Έτσι $c_1=\int_0^L\sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{2\pi x}{L})\frac{2}{\sqrt{3L}}\sin(\frac{2\pi x}{3L})dx=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}L}\int_0^L\sin(\frac{2\pi x}{L})\sin(\frac{2\pi x}{3L})dx$.

ΘΕΜΑ 5

Να βρεθούν οι ιδιοτιμές της *αρνητικής* ενέργειας για δυναμικό $V(x)=c\delta(x)$, όπου $c<0$.

Έχει διδαχθεί στο μάθημα και είναι λυμένη στο βιβλίο ασκήσεων του Τραχανά.

ΘΕΜΑ 6

Θεωρούμε σκέδαση ηλεκτρονίου σε ορθογώνιο φράγμα δυναμικό πάχους L και ύψους V_0 και $E>V_0$.

Ο συντελεστής ανάκλασης υπολογίζεται από την σχέση, $R=\frac{V_0^2\sin^2(\frac{\sqrt{2m(E-V_0)L^2}}{\hbar})}{4E(E-V_0)+V_0^2\sin^2(\frac{\sqrt{2m(E-V_0)L^2}}{\hbar})}$.

(α) Συντονισμός για $R=0\Rightarrow\sin^2(\frac{\sqrt{2m(E-V_0)L^2}}{\hbar})=0\Rightarrow\frac{\sqrt{2m(E-V_0)L^2}}{\hbar}=n\pi\Rightarrow E=V_0+\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}n^2$.

(β) Για ύψος του φράγματος $1eV$ και πάχος $1nm$, έχουμε $\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}=\frac{h^2}{8mL^2}=\frac{6.626^2\times10^{-68}}{8\times9.1\times10^{-31}\times10^{-18}}=0.6\times10^{-19}J=0.377\text{eV}$, άρα η ελάχιστη τιμή για το μικρότερο n, n=1 δίνει $E=1eV+0.377eV=1.377eV$.

ΘΕΜΑ 7

Αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις του με $\langle E\rangle=1$, $\langle x\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}$ για t=0.

(α) Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση του συστήματος για t=0.

(β) Υπολογίστε την *χρονοεξαρτώμενη* μέση τιμή της ορμής χρησιμοποιώντας τους τελεστές a,a^{+}.

Αρμονικός ταλαντωτής στις δύο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις του με $\langle E\rangle=1$, άρα έχουμε $\langle E\rangle=P_0\cdot\frac{1}{2}+P_1\cdot\frac{3}{2}=1$ και $P_0+P_1=1$, όποτε $P_0=P_1=\frac{1}{2}$ και $|c_0|=|c_1|=1/\sqrt{2}$.

Γενικά ισχύει για $\Psi(x,t)=|c_0|e^{i\varphi_{01}}\psi_0e^{-it/2}+|c_1|\psi_1e^{-i3t/2}$ η μέση τιμή οποιοδήποτε τελεστή είναι,

$\langle A\rangle(t)=|c_0|^2 A_{00}+|c_1|^2 A_{11}+2|c_0||c_1||A_{01}|\cos(\omega t+\varphi_{01}+\delta)$, όπου στο φυσικό σύστημα μονάδων για το πρόβλημά μας ισχύει $\omega=3/2-1/2=1$ και $A_{01}=|A_{01}|e^{-i\delta}$. Για την θέση και για t=0 έχουμε (καθώς ισχύει $x_{00}=x_{11}=0$) ότι $\langle x\rangle(t=0)=2|c_0||c_1||x_{01}|\cos(\varphi_{01}+\delta)$.

Υπολογίζουμε το x_{01},

$$x_{01}=\int_{-\infty}^{\infty}\psi_0^*\hat{x}\psi_1\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-x^2/2}x\sqrt{\frac{4}{\pi}}xe^{-x^2/2}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2}dx=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i0}=|x_{01}|e^{-i\delta},$$

$|x_{01}|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ και $\delta=0$, οπότε $\langle x\rangle(t=0)=2|c_0||c_1||x_{01}|\cos(\varphi_{01}+0)=\cos(\varphi_{01})/\sqrt{2}$ και αφού $\langle x\rangle(t=0)=1/\sqrt{2}$ βρίσκουμε ότι $\varphi_{01}=0$.

(α) Άρα η κυματοσυνάρτηση για t=0, $\Psi(x,t)=|c_0|e^{i\varphi_{01}}\psi_0e^{-it/2}+|c_1|\psi_1e^{-i3t/2}\Rightarrow\Psi(x,t=0)=\frac{\psi_0+\psi_1}{\sqrt{2}}$.

(β) Μέση τιμή της ορμής χρησιμοποιώντας τους τελεστές a,a^+. Η χρονοεξαρτώμενη κυματοσυνάρτηση είναι, $\Psi(x,t)=|c_0|e^{i\varphi_{01}}\psi_0e^{-it/2}+|c_1|\psi_1e^{-i3t/2}=\frac{\psi_0e^{-it/2}+\psi_1e^{-i3t/2}}{\sqrt{2}}$. Και σε μορφή αναπαράστασης Dirac, $|\Psi(x,t)\rangle=\frac{e^{-it/2}|0\rangle+e^{-i3t/2}|1\rangle}{\sqrt{2}}$. Υπάρχουν πολλά παλιά θέματα όπου φαίνονται όλες οι πράξεις, ανατρέξτε εκεί για να καταλάβετε γιατί $\langle p\rangle(t)=-\sin(t)/\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 8

Η κατάσταση του ηλεκτρονίου σε ένα άτομο υδρογόνου περιγράφεται, σε μια ορισμένη χρονική στιγμή από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(\vec{r})=N\left(2\psi_{21-1}(\vec{r})-i\psi_{211}(\vec{r})\right)$.

(α) Να υπολογίστε τον συντελεστή κανονικοποίησης.

Ακόμη να υπολογίστε την **(β)** $\langle E\rangle$, **(γ)** την αβεβαιότητα Δl_z και **(δ)** την *χρονοεξαρτημένη* $\langle l_x\rangle(t)$.

(α) $\int\Psi^*(\vec{r})\Psi(\vec{r})d\vec{r}=\int N\left(2\psi^*_{21-1}(\vec{r})+i\psi^*_{211}(\vec{r})\right)N\left(2\psi_{21-1}(\vec{r})-i\psi_{211}(\vec{r})\right)d\vec{r}=5N^2=1$

Οπότε $N=1/\sqrt{5}$ και $P_{21-1}=4/5$ και $P_{211}=1/5$.

(β) Η ενέργεια προσδιορίζεται από τον πρώτο κβαντικό αριθμό, n=2, οπότε έχουμε στάσιμη κατάσταση. Δηλαδή $\Psi(\vec{r},t)=\left(2\psi_{21-1}(\vec{r})-i\psi_{211}(\vec{r})\right)e^{-\varepsilon t/4\hbar}/\sqrt{5}$. Έτσι $\langle E\rangle=-\frac{\varepsilon}{2^2}=-3,4eV$.

(γ) $\langle l_z\rangle=P_{21-1}(-1)+P_{211}(+1)=-\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=-\frac{3}{5}$ και $\langle l_z^2\rangle=P_{21-1}(-1)^2+P_{211}(+1)^2=\frac{4}{5}+\frac{1}{5}=1$, οπότε

$(\Delta l_z)^2=\langle l_z^2\rangle-\langle l_z\rangle^2=1-\left(-\frac{3}{5}\right)^2=\frac{16}{25}\Rightarrow(\Delta l_z)=\frac{4}{5}$.

(δ) Το $\langle l_x\rangle(t)$ είναι μηδενική καθώς,

$$\langle l_x\rangle=\int\Psi^*(\vec{r})l_x\Psi(\vec{r})d\vec{r}=\int\Psi^*(\vec{r})\left(\frac{l_++l_-}{2}\right)\Psi(\vec{r})d\vec{r}=\int\left(2\psi^*_{21-1}(\vec{r})+i\psi^*_{211}(\vec{r})\right)\left(\frac{l_++l_-}{10}\right)\left(2\psi_{21-1}(\vec{r})-i\psi_{211}(\vec{r})\right)d\vec{r}=$$

$$\int\left(2\psi^*_{21-1}(\vec{r})+i\psi^*_{211}(\vec{r})\right)\left(2l_+\psi_{21-1}(\vec{r})-il_+\psi_{211}(\vec{r})+2l_-\psi_{21-1}(\vec{r})-il_-\psi_{211}(\vec{r})\right)d\vec{r}/10=$$

$$\int\left(2\psi^*_{21-1}(\vec{r})+i\psi^*_{211}(\vec{r})\right)\left(2\sqrt{2}\psi_{210}(\vec{r})-i\cdot0+2\cdot0-i\sqrt{2}\psi_{210}(\vec{r})\right)=d\vec{r}/10=0$$

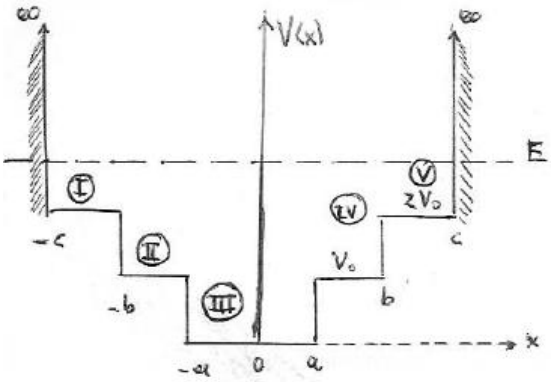
ο όπου για τον μηδενισμός των ολοκληρωμάτων χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις ορθογωνιότητας.

ΘΕΜΑ 4

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε *συμμετρικό* δυναμικό $V(x)$, με $V(x\geq 0)=\begin{cases} 0, & x<a \\ V_0, & a<x<b \\ 2V_0, & b<x<c \\ \infty, & x>c \end{cases}$, όπου $a<b<c$ και $V_0\geq 0$.

(α) Να προσδιοριστεί η μορφή των *περιττών* ιδιοσυναρτήσεων της ενέργειας για ενέργειες $E>2V_0$.

(β) Να βρεθεί η συνθήκη από την οποία εκτιμούνται οι ιδιοτιμές των περιττών ιδιοσυναρτήσεων του προηγούμενου ερωτήματος.



Η πιο γενική μορφή των κυματοσυναρτήσεων είναι $\psi_i^i(x)=A^i\cos k_i x+\Pi^i\sin k_i x$

όπου $i=\text{I},\text{II},\text{III},\text{IV}$ και V

και $k_{\text{I}}=k_{\text{V}}=\frac{\hbar^2}{2m}(E-2V_0)(=k'')$

$k_{\text{II}}=k_{\text{IV}}=\frac{\hbar^2}{2m}(E-V_0)$ $(=k')$, $k_{\text{III}}=\frac{\hbar^2}{2m}E(=k)$

(α) ΠΕΡΙΤΤΕΣ ΛΥΣΕΙΣ, άρα $\psi^{\text{III}}=\Pi^{\text{III}}\sin kx$

$\psi_{\text{II}}=A^{\text{II}}\cos k'x+\Pi^{\text{II}}\sin k'x$, $\psi_{\text{IV}}=A^{\text{IV}}\cos k'x+\Pi^{\text{IV}}\sin k'x$

καθώς $\psi(x)=-\psi(x)\Rightarrow\psi_{\text{II}}(-x)=-\psi_{\text{IV}}(x)\Rightarrow A^{\text{IV}}=A^{\text{II}}$ & $\Pi^{\text{IV}}=\Pi^{\text{II}}$

Με ανάλογα επιχειρήματα, και καθώς σας περιοχές I & V έχουμε την συνοριακή συνθήκη $\psi_{\text{I}}(-c)=\psi_{\text{V}}(c)=0$ βρίσκουμε $\psi_{\text{I}}(x)=A''\sin k''(x+c)$, $\psi_{\text{V}}(x)=A'\sin k''(x-c)$

(β) Λόγω της συμμετρίας χρησιμοποιούμε τις συνοριακές συνθήκες για $x>0$.

$\psi_{\text{III}}=\Pi\sin kx$, $\psi_{\text{II}}=A'\sin k'x+\Pi'\cos k'x$ & $\psi_{\text{V}}=\Pi''\sin k''(x-c)$

Σ.Σ στο $x=a$: $\Pi\sin ka=\Pi'\sin k'a+A'\cos k'a$ & $+\Pi k\cos ka=\Pi' k'\cos k'a-A' k'\sin k'a$

Σ.Σ στο $x=b$: $\Pi'\sin k'b+A'\cos k'b=\Pi''\sin k''(b-c)$, $\Pi' k'\cos k'b-A' k'\sin k'b=\Pi'' k''\cos k''(b-c)$

Υπό μορφή πίνακα οι Σ.Σ.

$$\begin{bmatrix} -\sin ka & \sin k'a & \cos k'a & 0 \\ k\cos ka & -k'\cos k'a & k'\sin k'a & 0 \\ 0 & \sin k'b & \cos k'b & \sin k''(b-c) \\ 0 & -k'\cos k'b & k'\sin k'b & k''\cos k''(b-c) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Pi\\ \Pi'\\ A'\\ \Pi''\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

W

Για να έχουμε μη μηδενική λύση, πρέπει η ορίζουσα $\det W=0$, που είναι η ζητούμενη συνθήκη για την εύρεση ιδιοτιμών ενέργειας.