ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Τελική Εξέταση: 31 Γενάρη 2012 (Διδάσκων: Α.Φ. Τερζής)

Διάρκεια εξέτασης ***3 ώρες.***

ΘΕΜΑ 1 [0,25+0,25+0,5+0,25+0,5+0,5+0,25+0,5=**3**]

Θεωρούμε κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή,

$H = 3\varepsilon \left|1\right\rangle\left\langle 1\right| + \left(\mu \left|1\right\rangle\left\langle 2\right| - 2i\varepsilon \left|2\right\rangle\left\langle 1\right|\right)$,

με $\left|1\right\rangle$, $\left|2\right\rangle$ ιδιοσυναρτήσεις κάποιου ερμιτιανού τελεστή και ε πραγματικός.

Να βρεθούν **(α)** η τιμή του μ, **(β)** οι ιδιοτιμές και **(γ)** τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας. **(δ)** Να δειχθεί ότι τα ιδιοδιανύσματα είναι ορθογώνια.

Θεωρούμε ένα φυσικό μέγεθος που περιγράφεται από τον τελεστή W με στοιχεία μήτρας, χρησιμοποιώντας τα ιδιοδιανύσματα της ενέργειας, της μορφής,

$W = \begin{bmatrix} 0 & w \\ w & 0 \end{bmatrix}$, όπου w πραγματικός.

(ε) Να βρεθούν ποιες είναι οι δυνατές μετρούμενες τιμές για το φυσικό μέγεθος που περιγράφεται από τον τελεστή W.

Την χρονική στιγμή t=0, μετράμε την μέση τιμή του τελεστή W και βρίσκουμε μηδενική τιμή.

(στ) Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$.

(ζ) Αν την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$ μετρήσω τα φυσικά μεγέθη W και H ποιες είναι οι δυνατές μετρούμενες τιμές και με ποιες πιθανότητες;

(η) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της μέσης τιμής του τελεστή W, χρησιμοποιώντας την σχέση με τον μεταθέτη $\left(i\hbar\frac{d}{dt}\langle W\rangle = \langle [W,H]\rangle\right)$.

<u>Λύση</u>

(α) Καθώς η Χαμιλτονιανή είναι ερμιτιανός τελεστής έχουμε ότι

$\left\langle 1\right| H \left|2\right\rangle = \left(\left\langle 2\right| H \left|1\right\rangle\right)^* \Rightarrow \mu = 2i\varepsilon$.

(β) Απαιτούμε $\det\begin{bmatrix} 3\varepsilon-\lambda & 2i\varepsilon \\ -2i\varepsilon & 0-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-3\varepsilon) - 4\varepsilon^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\varepsilon\lambda - 4\varepsilon^2 = 0 \Rightarrow \lambda_+ = 4\varepsilon, \lambda_- = -\varepsilon$.

(γ) Για το πρώτο ιδιοδιάνυσμα (λ=+4ε) χρειάζεται να λύσω το αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 3\varepsilon-4\varepsilon & 2i\varepsilon \\ -2i\varepsilon & 0-4\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\varepsilon & 2i\varepsilon \\ -2i\varepsilon & -4\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

με το περιορισμό της κανονικότητας $|x|^2 + |y|^2 = 1$ (προσοχή, x, y είναι γενικά μιγαδικοί).

Για το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα (λ=-5ε) χρειάζεται να λύσω το αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 3\varepsilon+\varepsilon & 2i\varepsilon \\ -2i\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4\varepsilon & 2i\varepsilon \\ -2i\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

με το περιορισμό της κανονικότητας $|x'|^2 + |y'|^2 = 1$ (προσοχή, x', y' είναι γενικά μιγαδικοί).

Οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας είναι $\left|\psi_+\right\rangle = \frac{2i\left|1\right\rangle + \left|2\right\rangle}{\sqrt{5}}$, $\left|\psi_-\right\rangle = \frac{\left|1\right\rangle + 2i\left|2\right\rangle}{\sqrt{5}}$.

(δ) $\left\langle\psi_+\middle|\psi_-\right\rangle = \left(\frac{-2i\left\langle 1\right| + \left\langle 2\right|}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{\left|1\right\rangle + 2i\left|2\right\rangle}{\sqrt{5}}\right) = \frac{-2i\left\langle 1\middle|1\right\rangle + 4\left\langle 1\middle|2\right\rangle + \left\langle 2\middle|1\right\rangle + 2i\left\langle 2\middle|2\right\rangle}{5} = \frac{-2i+2i}{5} = 0$

(ε) Απαιτούμε $\det\begin{bmatrix} -\lambda & \mathrm{w} \\ \mathrm{w} & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - \mathrm{w}^2 = 0 \Rightarrow \lambda_+ = \mathrm{w}, \lambda_- = -\mathrm{w}$. Οπότε οι *δυνατές μετρούμενες τιμές* για το φυσικό μέγεθος που περιγράφεται από τον τελεστή W είναι οι w και $-w$.

Ακόμα βρίσκουμε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις είναι $|+\mathrm{w}\rangle = \frac{|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}}$, $|-\mathrm{w}\rangle = \frac{|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}}$.

Έχουμε δηλαδή $W|+w\rangle = +w|+w\rangle$, $W|\text{-}w\rangle = \text{-}w|\text{-}w\rangle$.

Γνωρίζουμε ότι $\langle W\rangle = |c_+|^2 \langle\psi_+|W|\psi_+\rangle + |c_-|^2 \langle\psi_-|W|\psi_-\rangle + 2|c_+||c_-||\langle\psi_+|W|\psi_-\rangle|\cos\varphi$.

Ενώ από την μορφή του τελεστή W σε πίνακα καταλαβαίνουμε ότι $W = w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| + w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|$, άρα έχουμε

$\langle W\rangle = |c_+|^2 \langle\psi_+|\left(w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| + w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|\right)|\psi_+\rangle + |c_-|^2 \langle\psi_-|\left(w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| + w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|\right)|\psi_-\rangle$

$+2|c_+||c_-|\left|\langle\psi_+|\left(w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| + w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|\right)|\psi_-\rangle\right|\cos\varphi = 4|c_+||c_-||w|\cos\varphi$.

Από την τελευταία σχέση καταλαβαίνουμε ότι έχουμε μηδενική μέση τιμή για $c_+ = 0$ (οπότε και $c_- = 1$) ή για $c_- = 0$ (οπότε και $c_+ = 1$) ή για $\cos\varphi = 0 \to \varphi = \pm\pi/2$.

(στ) Έτσι η κυματοσυνάρτηση του συστήματος για t =0 είναι μία από τις παρακάτω

$|\psi(x,t=0)\rangle = |\psi_+\rangle$

$|\psi(x,t=0)\rangle = |\psi_-\rangle$

$|\psi(x,t=0)\rangle = \sqrt{P_0}\,|\psi_+\rangle + \sqrt{1-P_0}\,e^{\pm\pi/2}|\psi_-\rangle = \sqrt{P_0}\,|\psi_+\rangle \pm i\sqrt{1-P_0}\,|\psi_-\rangle$.

Οπότε η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$ είναι

$|\psi(x,t)\rangle = |\psi_+\rangle$

$|\psi(x,t)\rangle = |\psi_-\rangle$

$|\psi(x,t)\rangle = \sqrt{P_0}\,|\psi_+\rangle e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \pm i\sqrt{1-P_0}\,|\psi_-\rangle e^{i\varepsilon t/\hbar}$.

Μια ισοδύναμη μέθοδος είναι η ακόλουθη.

Αφού την χρονική στιγμή t=0 μετράμε μηδενική μέση τιμή του τελεστή W και οι ιδιοτιμές είναι αντίθετες, θα πρέπει να εμφανίζονται με ίση πιθανότητα. Δηλαδή $|\psi(x,t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+w\rangle + \frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{2}}|-w\rangle$.

Οπότε

$$|\psi(x,t=0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+w\rangle + \frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{2}}|-w\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}}\right) + \frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{2}}\left(\frac{|\psi_+\rangle - |\psi_-\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\left(1+e^{i\vartheta}\right)}{2}|\psi_+\rangle + \frac{\left(1-e^{i\vartheta}\right)}{2}|\psi_-\rangle =$$

$$= \frac{e^{i\vartheta/2}\left(e^{-i\vartheta/2} + e^{i\vartheta/2}\right)}{2}|\psi_+\rangle + \frac{e^{i\vartheta/2}\left(e^{-i\vartheta/2} - e^{i\vartheta/2}\right)}{2}|\psi_-\rangle = \cos(\vartheta/2)|\psi_+\rangle - i\sin(\vartheta/2)|\psi_-\rangle,$$

όπου ϑ μια τυχαία γωνία.

Η έκφραση αυτή είναι ισοδύναμη με την $|\psi(x,t=0)\rangle = \sqrt{P_0}\,|\psi_+\rangle \pm i\sqrt{1-P_0}\,|\psi_-\rangle$. Ακριβολογώντας η $\cos(\vartheta/2)|\psi_+\rangle - i\sin(\vartheta/2)|\psi_-\rangle$ είναι ισοδύναμη με την $\sqrt{P_0}\,|\psi_+\rangle - i\sqrt{1-P_0}\,|\psi_-\rangle$ για $0 \le \vartheta \le \pi$ και $\sqrt{P_0}\,|\psi_+\rangle + i\sqrt{1-P_0}\,|\psi_-\rangle$ για $\pi \le \vartheta \le 2\pi$

(ε) Καθώς για τις δυο πρώτες περιπτώσεις έχουμε στάσιμη κατάσταση η μέτρηση της ενέργειας θα δίνει με 100% πιθανότητα την τιμή +4ε $\left(|\psi_+\rangle\right)$ ή την τιμή -ε $\left(|\psi_-\rangle\right)$, ενώ για τον τελεστή W θα μπορεί να εμφανισθούν σε κάθε μέτρηση οι w και $-w$ με ίση πιθανότητα (50%).

Αν η κυματοσυνάρτηση είναι η $|\psi(x,t)\rangle = \sqrt{P_0}\,|\psi_+\rangle e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \pm i\sqrt{1-P_0}\,|\psi_-\rangle e^{i\varepsilon t/\hbar}$ η μέτρηση της ενέργειας θα δίνει με πιθανότητα P_0 την τιμή +4ε $\left(|\psi_+\rangle\right)$ και με πιθανότητα $1-P_0$ την τιμή -ε $\left(|\psi_-\rangle\right)$.

Ενώ για τον τελεστή W, έχουμε

$$|\psi(x,t)\rangle = \sqrt{P_0}\,|\psi_+\rangle e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \pm i\sqrt{1-P_0}\,|\psi_-\rangle e^{i\varepsilon t/\hbar} = \sqrt{P_0}\left(\frac{|+w\rangle+|-w\rangle}{\sqrt{2}}\right)e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \pm i\sqrt{1-P_0}\left(\frac{|+w\rangle-|-w\rangle}{\sqrt{2}}\right)e^{i\varepsilon t/\hbar} =$$

$$\left(\frac{\sqrt{P_0}e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \pm i\sqrt{1-P_0}e^{i\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}}\right)|+w\rangle + \left(\frac{\sqrt{P_0}e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \mp i\sqrt{1-P_0}e^{i\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}}\right)|-w\rangle.$$

Οπότε η ιδιοτιμή $+w$ εμφανίζεται με πιθανότητα

$$\left|\left(\frac{\sqrt{P_0}e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \pm i\sqrt{1-P_0}e^{i\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 = \left(\frac{\sqrt{P_0}e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \pm i\sqrt{1-P_0}e^{i\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{\sqrt{P_0}e^{i4\varepsilon t/\hbar} \mp i\sqrt{1-P_0}e^{-i\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}}\right) =$$

$$\frac{P_0+(1-P_0)+i\sqrt{P_0(1-P_0)}\left(\pm e^{i5\varepsilon t/\hbar} \mp e^{-i5\varepsilon t/\hbar}\right)}{2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{P_0(1-P_0)}\sin(5\varepsilon t/\hbar),$$

και προφανώς η ιδοτιμή $-w$ εμφανίζεται με πιθανότητα $\frac{1}{2} \mp \sqrt{P_0(1-P_0)}\sin(5\varepsilon t/\hbar)$.

(η) Έχουμε $\frac{d}{dt}<W>=\frac{1}{i\hbar}<[W,H]>$, όπου

$$[W,H] = WH - HW =$$
$$\left(w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| + w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|\right)\left(4\varepsilon|\psi_+\rangle\langle\psi_+| - \varepsilon|\psi_-\rangle\langle\psi_-|\right) - \left(4\varepsilon|\psi_+\rangle\langle\psi_+| - \varepsilon|\psi_-\rangle\langle\psi_-|\right)\left(w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| + w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|\right) =$$
$$\left(-\varepsilon w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| + 4\varepsilon w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|\right) - \left(4\varepsilon w|\psi_+\rangle\langle\psi_-| - \varepsilon w|\psi_-\rangle\langle\psi_+|\right) =$$
$$5\varepsilon w\left(|\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-|\right)$$

Άρα για τις δύο πρώτες περιπτώσεις $|\psi(x,t)\rangle = |\psi_+\rangle$ ή $|\psi(x,t)\rangle = |\psi_-\rangle$ έχουμε

$$\langle[W,H]\rangle = \left\langle 5\varepsilon w\left(|\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-|\right)\right\rangle = \langle\psi_\pm|5\varepsilon w\left(|\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-|\right)|\psi_\pm\rangle = 0 \quad \text{και} \quad \frac{d}{dt}<W>=0.$$

Η κυματοσυνάρτηση $|\psi(x,t)\rangle = \sqrt{P_0}\,|\psi_+\rangle e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \pm i\sqrt{1-P_0}\,|\psi_-\rangle e^{i\varepsilon t/\hbar}$, δίνει

$$\langle[W,H]\rangle = \langle\psi(x,t)|5\varepsilon w\left(|\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-|\right)|\psi(x,t)\rangle =$$
$$= \left(\sqrt{P_0}e^{i4\varepsilon t/\hbar}\langle\psi_+| \mp i\sqrt{1-P_0}e^{-i\varepsilon t/\hbar}\langle\psi_-|\right)\left(5\varepsilon w\left(|\psi_-\rangle\langle\psi_+| - |\psi_+\rangle\langle\psi_-|\right)\right)\left(\sqrt{P_0}|\psi_+\rangle e^{-i4\varepsilon t/\hbar} \pm i\sqrt{1-P_0}|\psi_-\rangle e^{i\varepsilon t/\hbar}\right) =$$
$$\mp i5\varepsilon w\sqrt{P_0(1-P_0)}e^{i5\varepsilon t/\hbar} \mp i5\varepsilon w\sqrt{P_0(1-P_0)}e^{-i5\varepsilon t/\hbar} = \mp 10i\varepsilon w\sqrt{P_0(1-P_0)}\cos(5\varepsilon t/\hbar)$$

και $\frac{d}{dt}<W>=\mp(10\varepsilon w/\hbar)\sqrt{P_0(1-P_0)}\cos(5\varepsilon t/\hbar)$

ΘΕΜΑ 2 [**2**]

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται περιορισμένο σε συμμετρικό απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού εύρους L. Η αρχική νορμαλισμένη κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου είναι

$\psi(x,t=0) = \cos\frac{\pi x}{L}\left(1 - \mathrm{i}\cdot c\cdot\sin\frac{\pi x}{L}\right)/\sqrt{2L}$, για $|x| \le L/2$, όπου c πραγματικός.

(α) Να βρεθεί μέση αρτιότητα (parity) την χρονική στιγμή $t=0$.

(β) Να προσδιοριστεί η $\psi(x,t)$.

(γ) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του συστήματος.

(δ) Να υπολογιστεί η μέση αρτιότητα του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή t.

Λύση

Έχουμε

$\psi(x,t=0)=\cos\frac{\pi x}{L}(1-i\cdot c\cdot\sin\frac{\pi x}{L})/\sqrt{2L}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{\pi x}{L}+\frac{-ic}{4}\sqrt{\frac{2}{L}}2\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi x}{L}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{\pi x}{L}+\frac{-ic}{4}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L}=\frac{1}{2}\psi_1+\frac{-ic}{4}\psi_2.$

Άρα $P_1=(1/4)^2=1/4$ και $P_2=1-1/4=3/4$, οπότε $P_2=\left(\frac{-ic}{4}\right)^*\frac{-ic}{4}=\left(\frac{ic}{4}\right)\left(\frac{-ic}{4}\right)=\frac{c^2}{16}=\frac{3}{4}\Rightarrow c=2\sqrt{3}$.

(α) Η μέση αρτιότητα είναι $\langle P\rangle=P_1\cdot(+1)+P_2\cdot(-1)=1/4-3/4=-0,5$

(β) $\psi(x,t)=\frac{1}{2}\psi_1e^{-iE_1t/\hbar}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\psi_2e^{-iE_2t/\hbar}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{\pi x}{L}e^{-iE_1t/\hbar}-\frac{i\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L}e^{-iE_2t/\hbar}$, όπου

$E_1=\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}$ και $E_2=4E_1$.

(γ) $\langle E\rangle=P_1E_1+P_2E_1=0,25(E_1+3E_2)=0,25(E_1+3\cdot4E_1)=\frac{13E_1}{4}=\frac{13\hbar^2\pi^2}{8mL^2}$.

(δ) Έχουμε συμμετρικό δυναμικό, οπότε η αρτιότητα διατηρείται ($\frac{d}{dt}<P>=\frac{1}{i\hbar}<[P,H]>=\frac{1}{i\hbar}<0>=0$).

Άρα την τυχαία χρονική στιγμή *t* θά έχει την ίδια τιμή με αυτή της $t=0$. Δηλαδή $\langle P\rangle(t)=-0,5.$

ΘΕΜΑ 3 [1,5]

Θεωρούμε ηλεκτρόνιο περιορισμένο σε μονοδιάστατο κβαντικό σύστημα με δυναμική ενέργεια $V(x)=-c\delta(x)$, με $c=0,39\ eV\cdot nm$. Να βρεθούν, **(α)** η μέση ενέργεια του συστήματος σε eV, **(β)** η αβεβαιότητα της ενέργειας και **(γ)** η πιθανότητα (%) να βρεθεί το ηλεκτρόνιο στην περιοχή $[-0,1nm,\ 0,1nm]$.

Χρήσιμες Φυσικές σταθερές, $\hbar=1,054\times10^{-34}J\cdot s,\ m_e=9,1\times10^{-31}kg,\ e=1,6\times10^{-19}C.$

Λύση

Από τις παραδόσεις του μαθήματος και από άσκηση στο βιβλίο ασκήσεων του Τραχανά γνωρίζουμε ότι έχουμε μία δέσμια κατάσταση με ενέργειας $E=-\frac{mc^2}{2\hbar^2}$ και ιδιοσυνάρτηση $\Psi(x)=\sqrt{\gamma}e^{-\gamma|x|}$, όπου $\gamma=\frac{mc}{\hbar^2}$. Άρα έχουμε στάσιμη κατάσταση.

(α)

$$\langle E\rangle=E=-\frac{mc^2}{2\hbar^2}=\frac{(9,1\times10^{-31}kg)\times(0,39eV\cdot nm)^2}{2\times(1,054\times10^{-34}J\cdot s)^2}=-\frac{(9,1\times10^{-31}kg)\times(0,39^2eV\cdot nm^2)}{2\times(1,054\times10^{-34}J\cdot s)^2}eV=$$

$$=-\frac{(9,1\times10^{-31}kg)\times(0,39^2\times1,6\times10^{-19}J\cdot10^{-18}m^2)}{2\times(1,054\times10^{-34}J\cdot s)^2}eV=-\frac{9,1\times0,39^2\times1,6}{2\times1,054^2}\frac{10^{-68}}{10^{-68}}\frac{(kg\cdot m^2/s^2)J}{J^2}eV\approx-1eV$$

(β) Σε στάσιμη κατάσταση η αβεβαιότητα ενέργειας έχει *μηδενική τιμή*.

(γ) Η πιθανότητα να βρεθεί το ηλεκτρόνιο στην περιοχή $[-x_0,\ x_0]$, υπολογίζεται από την σχέση

$$\int_{-x_0}^{x_0}\Psi^*(x)\Psi(x)dx=\int_{-x_0}^{x_0}\Psi^*(x)\Psi(x)dx=2\int_0^{x_0}\Psi^*(x)\Psi(x)dx=2\int_0^{x_0}\sqrt{\gamma}e^{-\gamma x}\sqrt{\gamma}e^{-\gamma x}dx=2\int_0^{x_0}\gamma e^{-2\gamma x}dx=-e^{-2\gamma x}\Big|_0^{x_0}=1-e^{-2\gamma x_0}.$$

Τώρα

$$\gamma=\frac{mc}{\hbar^2}=\frac{(9,1\times10^{-31}kg)\times(0,39eV\cdot nm)}{(1,054\times10^{-34}J\cdot s)^2}=\frac{(9,1\times10^{-31}kg)\times(0,39\times1,6\times10^{-19}J\cdot10^{-9}m)}{(1,054\times10^{-34}J\cdot s)^2}=\frac{9,1\times0,39\times1,6}{1,054^2}\frac{10^{-59}}{10^{-68}}\frac{(kg\cdot m^2/s^2)J}{J^2}m^{-1}\approx5,1nm^{-1}$$

Καθώς $1-e^{-2\gamma x_0}=1-e^{-2\times5.1\times0.1}=1-0.36=0.64$ η πιθανότητα είναι 64%.

ΘΕΜΑ 4 [0,75+0,5+0,75=**2**]

Ένας αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις του.

(α) Προσδιορίστε την $\psi(x)$ αν γνωρίζουμε ότι $\langle E\rangle = 5/4, \langle x\rangle = \sqrt{3/8}$.

(β) Υπολογίστε την μέση τιμή της ορμής, από την σχέση $\langle p\rangle = \left(\Psi(x), \hat{p}\Psi(x)\right)$.

(γ) Υπολογίστε την μέση τιμή της ορμής, χρησιμοποιώντας τους τελεστές $a,\ a^+$.

<u>*Υπόδειξη:*</u> $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},\ \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}e^{-\alpha x^2}dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(2\alpha)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}},\ \Psi_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}}e^{-x^2/2},\ \Psi_1 = \sqrt[4]{\frac{4}{\pi}}xe^{-x^2/2}$.

<u>Λύση</u>

(α) Έχουμε $\langle E\rangle = P_0E_0 + P_1E_1 = (1/2)P_0 + (3/2)P_1 = 5/4$ και καθώς $P_0 + P_1 = 1$, βρίσκουμε $P_0 = |c_0|^2 = 1/4, P_1 = |c_1|^2 = 3/4$.

Ακόμα γνωρίζουμε ότι $\langle x\rangle = 2|c_0||c_1||x_{01}|\cos\delta$, όπου $|x_{01}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$, καθώς

$$x_{01} = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_0(x)x\Psi_1(x)dx = \sqrt[4]{\frac{4}{\pi^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}x(xe^{-x^2/2})dx = \sqrt[4]{\frac{4}{\pi^2}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |x_{01}| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\text{άρα } \langle x\rangle = \sqrt{3/8} = 2|c_0||c_1||x_{01}|\cos\delta = 2(1/2)\left(\sqrt{3}/2\right)\left(1/\sqrt{2}\right)\cos\delta = \sqrt{3/8}\cos\delta \Rightarrow \cos\delta = 1 \Rightarrow \delta = 0.$$

Έτσι η κυματοσυνάρτηση είναι $\Psi(x) = (1/2)\Psi_0 + (\sqrt{3}/2)\Psi_1$.

(β) Έχουμε

$$\langle p\rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi^*(x)\hat{p}\Psi(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x)(-i\frac{\partial\Psi(x)}{\partial x})dx = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\Psi_0}{2} + \frac{\sqrt{3}\Psi_1}{2}\right)\left[-i\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\Psi_0}{2} + \frac{\sqrt{3}\Psi_1}{2}\right)\right]dx =$$

$$\frac{-i}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Psi_0 + \sqrt{3}\Psi_1\right)\left(\frac{\partial\Psi_0}{\partial x} + \sqrt{3}\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}\right)dx = \frac{-i\sqrt{3}}{4}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Psi_0\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} + \Psi_1\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\right)dx = 0$$

Όπου τα ολοκληρώματα $\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_0\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}dx = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}dx$ μηδενίζονται καθώς $\Psi_0\frac{\partial\Psi_1}{\partial x}$, $\Psi_1\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}$ είναι περιττές συναρτήσεις, ενώ το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty}\left(\Psi_0\frac{\partial\Psi_1}{\partial x} + \Psi_1\frac{\partial\Psi_0}{\partial x}\right)dx$ πρέπει να δίνει μηδέν αλλιώς η μέση ορμή θα ήταν μιγαδική! (επιβεβαιώστε υπολογίζοντας και τα ολοκληρώματα).

Επίσης από την σχέση $\langle p\rangle = 2|c_0||c_1||p_{01}|\sin\delta$ και καθώς $\delta = 0$, βρίσκουμε άμεσα ότι $\langle p\rangle = 0$.

(γ) Η κυματοσυνάρτηση είναι $|\Psi\rangle = (1/2)|0\rangle + (\sqrt{3}/2)|1\rangle$ (φορμαλισμος Dirac), έτσι

$$\langle p\rangle = \langle\Psi|\frac{i\left(a^+ - a\right)}{\sqrt{2}}|\Psi\rangle = \left(\frac{1}{2}\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|\right)\left[\frac{a - a^+}{i\sqrt{2}}\right]\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right) = \left(\frac{1}{2}\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|\right)\left(-\frac{1}{2i\sqrt{2}}a^+|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2i\sqrt{2}}a|1\rangle - \frac{1}{2i\sqrt{2}}a^+|1\rangle\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|\right)\left(-\frac{1}{2i\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2i\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{2i\sqrt{2}}\sqrt{2}|2\rangle\right) =$$

$$-\frac{1}{4i\sqrt{2}}\langle 0|1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{4i\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle + \frac{1}{4i\sqrt{2}}\langle 0|2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4i\sqrt{2}}\langle 1|1\rangle - \frac{3}{4i\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{4i\sqrt{2}}\langle 1|2\rangle = -\frac{\sqrt{3}}{4i\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{4i\sqrt{2}} = 0$$

ΘΕΜΑ 5 [0,25+0,5+0,5+0,25=**1,5**]

Θεωρούμε μονοδιάστατο κβαντικό σύστημα του οποίου η δυναμική ενέργεια είναι $V(x) = V_0\Theta(-x)\Theta(L+x) + 3V_0\Theta(x)\Theta(L-x)$. Σωμάτιο μάζας *m* και ενέργειας $E = 2V_0$ σκεδάζεται ερχόμενο από το $-\infty$.

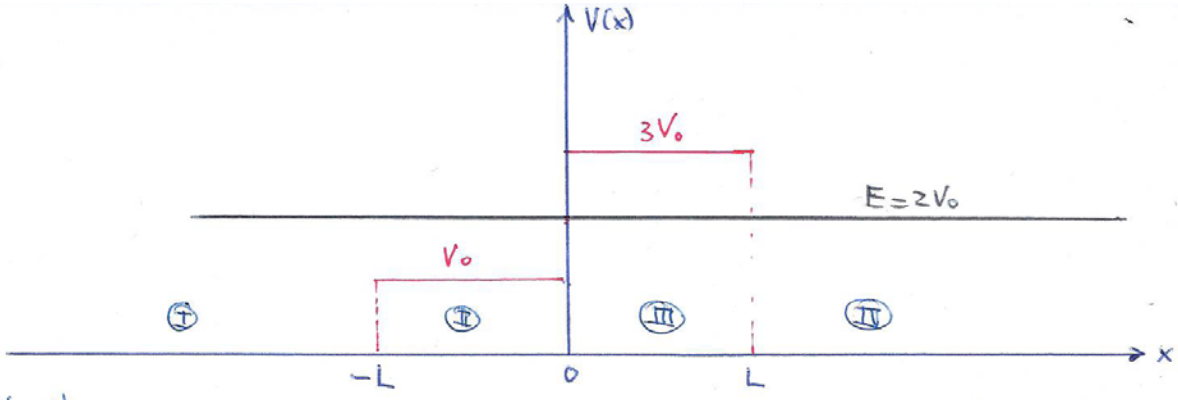
(α) Αναπαραστείστε γραφικά την συνάρτηση δυναμικής ενέργειας.

(β) Γράψτε τις κυματοσυναρτήσεις σε όλες τις περιοχές.

(γ) Γράψτε όλες τις συνθήκες συνέχειας.
(δ) Σκιαγραφείστε την μεθοδολογία για την εύρεση του συντελεστή ανάκλασης ή διέλευσης.

Υπόδειξη: Η συνάρτηση βήματος ορίζεται ως $\Theta(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ 1, & x>0\end{cases}$

(α)



Εξ. Schrödinger:

$\psi_I''+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_I=0$ $\quad \psi_{II}''+\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}\psi_{II}''=0$ $\quad \psi_{III}''+\frac{2m(E-3V_0)}{\hbar^2}\psi_{III}=0$ $\quad \psi_{IV}''+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi_{IV}=0$

ορίζουμε $k^2=\frac{2mE}{\hbar^2}=\frac{4mV_0}{\hbar^2}\Rightarrow \psi_I''+k^2\psi_I=0,\ \psi_{II}''+\frac{k^2}{2}\psi_{II}=0,\ \psi_{III}'-\frac{k^2}{2}\psi_{III}=0,\ \psi_{IV}''+k^2\psi_{IV}=0$

(β) $\psi_I(x)=\underbrace{e^{ikx}}_{\text{προσπίπτον}}+\underbrace{Ae^{-ikx}}_{\text{ανακλώμενο}}$, $\psi_{II}(x)=C_{II}^{+}e^{ikx/\sqrt{2}}+C_{II}^{-}e^{-ikx/\sqrt{2}}$, $\psi_{III}(x)=C_{III}^{+}e^{kx/\sqrt{2}}+C_{III}^{-}e^{-kx/\sqrt{2}}$, $\psi_{IV}=\underbrace{Ce^{ikx}}_{\text{διερχόμενο}}$

(γ) Συνθήκες συνέχειας:

Σ.Σ στο $x=-L$, $e^{-ikL}+Ae^{ikL}=C_{II}^{+}e^{-ikL/\sqrt{2}}+C_{II}^{-}e^{ikL/\sqrt{2}}$ (1)

$\frac{ik}{\sqrt{2}}\left(e^{-ikL}-Ae^{ikL}\right)=\frac{ik}{\sqrt{2}}\left(C_{II}^{+}e^{-ikL/\sqrt{2}}-C_{II}^{-}e^{ikL/\sqrt{2}}\right)$ (2)

Σ.Σ στο $x=0$ $C_{II}^{+}+C_{II}^{-}=C_{III}^{+}+C_{III}^{-}$ (3)

$\frac{ik}{\sqrt{2}}\left(C_{II}^{+}-C_{II}^{-}\right)=\frac{k}{\sqrt{2}}\left(C_{III}^{+}-C_{III}^{-}\right)\Rightarrow\left(C_{II}^{+}-C_{II}^{-}\right)i=C_{III}^{+}-C_{III}^{-}$ (4)

Σ.Σ στο $x=L$ $C_{III}^{+}e^{kL/\sqrt{2}}+C_{III}^{-}e^{-kL/\sqrt{2}}=Ce^{ikL}$ (5)

$\frac{ik}{\sqrt{2}}\left(C_{III}^{+}e^{kL/\sqrt{2}}-C_{III}^{-}e^{-kL/\sqrt{2}}\right)=ikCe^{ikL}$ (6)

(δ) $R=|A|^2$, $T=|C|^2$

Μεθοδολογία, διαιρούμε (6)/(5) και βρίσκουμε το $\frac{C_{III}^{-}}{C_{III}^{+}}$

Μετά διαιρούμε την (4)/(3) και βρίσκουμε το $\frac{C_{II}^{-}}{C_{II}^{+}}$ (το $\frac{C_{II}^{-}}{C_{II}^{+}}$ είναι γνωστό από το προηγούμενο βήμα)

Τέλος διαιρώντας την (2)/(1) με γνωστό το $\frac{C_{II}^{-}}{C_{II}^{+}}$ βρίσκουμε το A.

$$\frac{e^{-ikL}-Ae^{ikL}}{e^{-ikL}+Ae^{ikL}}=\frac{\left(e^{-ikL/\sqrt{2}}+\left(\frac{C_{II}^{-}}{C_{II}^{+}}\right)e^{ikL/\sqrt{2}}\right)\sqrt{2}}{e^{-ikL/\sqrt{2}}-\left(\frac{C_{II}^{-}}{C_{II}^{+}}\right)e^{ikL/\sqrt{2}}}$$

Πάτρα, 28/1/2013