ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

Τελική Εξέταση: 16 Σεπτέμβρη 2013 (Διδάσκων: Α.Φ. Τερζής)

ΘΕΜΑ 1[1+1+0.5]

Θεωρούμε κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή,

$H = 4\varepsilon\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\right) + 3i\varepsilon\left(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|\right)$,

με $|1\rangle$, $|2\rangle$ ιδιοσυναρτήσεις κάποιου ερμιτιανού τελεστή και ε πραγματικός.

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας.

Θεωρούμε ένα φυσικό μέγεθος που περιγράφονται από τον τελεστή A από την σχέση

$A = a\left(9|1\rangle\langle 1| + \mu|1\rangle\langle 2| - 3i|2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right)$, όπου μ παράμετρος που μπορεί να προσδιορισθεί από βασικές γνώσεις κβαντομηχανικής και a πραγματικός.

Την χρονική στιγμή t=0, μετράμε το φυσικό μέγεθος που σχετίζονται με τον τελεστή A και βρίσκουμε μηδενική τιμή.

(β) Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$.

(γ) Αν την χρονική στιγμή $t = 10\,ps$ μετρήσω τα φυσικά μεγέθη A και H ποιες είναι οι δυνατές μετρούμενες τιμές και με ποιες πιθανότητες;

Λύση

(α)Απαιτούμε

$$\det\begin{bmatrix} 4\varepsilon-\lambda & 3i\varepsilon \\ -3i\varepsilon & -4\varepsilon-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+4\varepsilon)(\lambda-4\varepsilon) - 9\varepsilon^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 16\varepsilon^2 - 9\varepsilon^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \pm 5\varepsilon\,.$$

Για το πρώτο ιδιοδιάνυσμα (λ=+5ε) χρειάζεται να λύσω το αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 4\varepsilon-5\varepsilon & 3i\varepsilon \\ -3i\varepsilon & -4\varepsilon-5\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\varepsilon & 3i\varepsilon \\ 3i\varepsilon & -6\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

με το περιορισμό της κανονικότητας $|x|^2 + |y|^2 = 1$ (**προσοχή**, x, y είναι γενικά μιγαδικοί).

Για το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα (λ=-5ε) χρειάζεται να λύσω το αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 4\varepsilon+5\varepsilon & 3i\varepsilon \\ -3i\varepsilon & -4\varepsilon+5\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9\varepsilon & 3i\varepsilon \\ 3i\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

με το περιορισμό της κανονικότητας $|x'|^2 + |y'|^2 = 1$ (**προσοχή**, x', y' είναι γενικά μιγαδικοί).

Οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας είναι $|\psi_+\rangle = \dfrac{3i|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{10}}$, $\quad |\psi_-\rangle = \dfrac{|1\rangle + 3i|2\rangle}{\sqrt{10}}$.

(β) Έχουμε λόγω της ερμιτιανότητας ότι $\mu = (-3i)^* = 3i$.

$$\det\begin{bmatrix} 9a-\lambda & 3ia \\ -3ia & a-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda-9a)(\lambda-a) - 9a^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 10a\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0, 10a\,.$$

Για το πρώτο ιδιοδιάνυσμα (λ=0) χρειάζεται να λύσω το αλγεβρικό σύστημα:

$\begin{bmatrix} 9a & 3ia \\ -3ia & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, που δίνει το $\dfrac{|1\rangle + 3i|2\rangle}{\sqrt{10}}$ το οποίο είναι το $|\psi_-\rangle$.

Ενώ ανάλογα βρίσκουμε ότι για το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα είναι το $|\psi_+\rangle$

Οπότε αφού κατά την μέτρηση βρίσκουμε την μηδενική ιδιοτιμή η κυματοσυνάρτηση είναι $|\Psi(x, t=0)\rangle = |\psi_-\rangle$.

Καθώς η αρχική κατάσταση είναι μια ιδοακατάσταση της ενέργειας έχουμε μια στάσιμη κατάσταση και $|\Psi(x,t)\rangle = |\Psi(x,t=0)\rangle = |\psi_-\rangle$.

(γ) Καθώς έχουμε στάσιμη κατάσταση η ενέργεια θα βρίσκεται πάντα στην ιδιοκατάσταση $|\psi_-\rangle$ και η μετρηση θα δίνει με 100% πιθανότητα η μέτρηση τιμή -5ε. Προφανώς για τους ίδιους λόγους και ο τελεστής A θα μετρίεται πάντα με μηδενική τιμή.

ΘΕΜΑ 2[1.5]

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού και περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi\left(x,t=0\right)=\frac{1}{\sqrt{2nm}}\sin\frac{\pi x}{2nm}\left[1+2\cos\frac{\pi x}{2nm}\right]$.

(α) Να προσδιοριστεί η $\psi\left(x,t\right)$.

(β) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του συστήματος σε *meV*.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\psi(x,t=0)=\sin\frac{\pi x}{L}(1+2\cos\frac{\pi x}{L})/\sqrt{L}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}2\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi x}{L}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L}=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2,$$

όπου L=2nm.

Άρα $\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 e^{-iE_1t/\hbar}+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 e^{-iE_2t/\hbar}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}e^{-iE_1t/\hbar}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L}e^{-iE_2t/\hbar}$.

(β) Καθώς έχουμε τις δύο ενεργειακές καταστάσεις απειρόβαθου πηγαδιού με $c_1=c_2=1/\sqrt{2}\Rightarrow P_1=P_2=1/2$, δηλαδή ισοπίθανες ενεργειακές καταστάσεις, έτσι $\left\langle E\right\rangle=P_1E_1+P_2E_2=0.5\left(E_1+E_2\right)$.

Οπότε καθώς $\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\approx 94meV$, και $\left\langle E\right\rangle=0.5\left(E_1+4E_1\right)=2.5\cdot 94meV=235meV$.

ΘΕΜΑ 3[1]

Ένα σωμάτιο μάζας *m* σκεδάζετε σε τετραγωνικό φράγμα δυναμικού, $V(x)=V_0\,\Theta(x)$.Το σωμάτιο κινείται από δεξιά προς αριστερά, δηλαδή έχουμε συνθήκες σκέδασης από δεξιά. Να βρεθεί ο συντελεστής ανάκλασης και διέλευσης, όταν είναι γνωστό ότι $V_0=16eV$ και $E=25eV$.

Λύση

Ουσιαστικά, έχουμε το πρόβλημα σκέδασης που μελετάτε στο βιβλίο, αλλά με $k\leftrightarrow k'$. Έτσι χρησιμοποιούμε τις σχέσεις του βιβλίου με $k\leftrightarrow k'$, που ουσιαστικά δίνει το ίδιο αποτέλεσμα.

Από τις σχέσεις αυτές βρίσκουμε $R=\left(\frac{\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0}}{\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0}}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{25}-\sqrt{25-16}}{\sqrt{25}+\sqrt{25-16}}\right)^2=\left(\frac{5-3}{5+3}\right)^2=\frac{1}{16}$ και $T=\frac{15}{16}$.

ΘΕΜΑ 4[1]

(α) Είναι ερμιτιανός τελεστής ο τελεστής xp_x+p_zy.

(β) Να βρεθεί η ελάχιστη δυνατή τιμή του $\Delta p_x\Delta l_x$.

Λύση

(α) Δεν είναι ερμιτιανός καθώς

$\left(xp_x+p_zy\right)^\dagger=\left(xp_x\right)^\dagger+\left(p_zy\right)^\dagger=p_x{}^\dagger x^\dagger+y^\dagger p_z{}^\dagger=p_xx+yp_z\neq xp_x+p_zy$

(β) $\Delta p_x\Delta l_x\geq\left|\frac{1}{2}\left\langle\left[p_x,l_x\right]\right\rangle\right|$, και καθώς

$$\left[p_x,l_x\right]=\left[p_x,yp_z-zp_y\right]=\left[p_x,yp_z\right]-\left[p_x,zp_y\right]=y\left[p_x,p_z\right]+\left[p_x,y\right]p_z-z\left[p_x,p_y\right]-\left[p_x,z\right]p_y=0$$

έχουμε η ελάχιστη τιμή είναι 0.

ΘΕΜΑ 5[0.75+1+0.75]

Ένας κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)=\left(\psi_0 e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}-\sqrt{2}\psi_1 e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}\right)/\sqrt{3}$.

(α) Υπολογίστε την μέση τιμή της ορμής για t=0.

(β) Υπολογίστε την χρονοεξαρτώμενη μέση τιμή της θέσης χρησιμοποιώντας τους τελεστές a, a^+.

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι η μέση ενέργεια είναι 70meV πόσο είναι η ε_0 σε meV;

Λύση

(α) Από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)=\left(\psi_0 e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}-\sqrt{2}\psi_1 e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}\right)/\sqrt{3}$, βρίσκουμε $c_0=1/\sqrt{3},\ c_1=\sqrt{2}/\sqrt{3}$. Η κυματοσυνάρτηση για t=0 είναι $\Psi(x,t=0)=\left(\psi_0-\sqrt{2}\psi_1\right)/\sqrt{3}$, *πραγματική* άρα η μέση ορμή είναι μηδέν, Ακόμα (2^{η} μέθοδος) γνωρίζουμε ότι $\langle p\rangle=2|c_0||c_1||p_{01}|\sin\delta$, με $\delta=0\Rightarrow\sin\delta=0$ και άρα $\langle p\rangle=0$.

(β) Η κυματοσυνάρτηση είναι $|\Psi\rangle=\left(e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}|0\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}|1\rangle\right)/\sqrt{3}$ (φορμαλισμος Dirac), έτσι

$$\langle x\rangle=\langle\Psi|\frac{a+a^+}{\sqrt{2}}|\Psi\rangle=\left(e^{i\varepsilon_0 t/\hbar}\langle 0|-\sqrt{2}e^{i\varepsilon_1 t/\hbar}\langle 1|\right)\left[\frac{a+a^+}{3\sqrt{2}}\right]\left(e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}|0\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}|1\rangle\right)=$$

$$\left(e^{i\varepsilon_0 t/\hbar}\langle 0|-\sqrt{2}e^{i\varepsilon_1 t/\hbar}\langle 1|\right)\left(e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}a^+|0\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}a|1\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}a^+|1\rangle\right)/3\sqrt{2}=$$

$$\left(e^{i\varepsilon_0 t/\hbar}\langle 0|-\sqrt{2}e^{i\varepsilon_1 t/\hbar}\langle 1|\right)\left(e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}|1\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}|0\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}\sqrt{2}|2\rangle\right)/3\sqrt{2}=$$

$$\left(e^{i\varepsilon_0 t/\hbar}\langle 0|-\sqrt{2}e^{i\varepsilon_1 t/\hbar}\langle 1|\right)\left(e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}|1\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}|0\rangle-2e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}|2\rangle\right)/3\sqrt{2}=$$

$$\left(\langle 0|1\rangle-\sqrt{2}e^{-i(\varepsilon_1-\varepsilon_0)t/\hbar}\langle 0|0\rangle-2e^{-i(\varepsilon_1-\varepsilon_0)t/\hbar}\langle 0|2\rangle-\sqrt{2}e^{-i(\varepsilon_0-\varepsilon_1)t/\hbar}\langle 1|1\rangle+2\langle 1|0\rangle-2\sqrt{2}\langle 1|2\rangle\right)/3\sqrt{2}=$$

$$=\left(-\sqrt{2}e^{-i(\varepsilon_1-\varepsilon_0)t/\hbar}-\sqrt{2}e^{-i(\varepsilon_0-\varepsilon_1)t/\hbar}\right)/3\sqrt{2}=-2\cos\left(\left(\varepsilon_1-\varepsilon_0\right)t/\hbar\right)/3$$

(γ)Έχουμε

$$\langle E\rangle=P_0E_0+P_1E_1=(1/3)(1/2)+(2/3)(3/2)=\frac{7}{6}\Rightarrow\langle E\rangle=\frac{7}{6}\hbar\omega_0=70meV\Rightarrow\hbar\omega_0=60meV.$$

Οπότε $\varepsilon_0=\hbar\omega_0/2=60meV/2=30meV$.

ΘΕΜΑ 6[1+0.5]

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε δυναμικό της μορφής $V(x)=\begin{cases}c\delta(x), & |x|\le L\\ \infty, & |x|>L\end{cases}$ όπου $c<0$.

(α) Να δειχθεί ότι οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας, για αρνητικές τιμές της ενέργειας, έχουν την μορφή $\sinh\gamma\left(L-|x|\right)$, όπου $\gamma^2=-2mE/\hbar^2$.

(β) Να αποδειχθεί ότι οι δυνατές τιμές της ενέργειας προσδιορίζονται από την σχέση $\tanh\left(\gamma L\right)=-\gamma\hbar^2/mc$.

Λύση

Πρόβλημα στο διαδίκτυο στην σειρά ΑσκησειςΚΒΑΝΤΟ_Ι_[Απειρόβαθο_Πηγάδι}_σετ3, άσκηση **ΑΚΠ3α** για αρνητικές ενέργειες.

Πάτρα, 16/9/2013