ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

Πρόχειρο Διαγώνυσμα: 4 Δεκεμβρίου 2012 (Διδάσκων: Α.Φ. Τερζής). Διάρκεια εξέτασης 1 ώρα.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΑΡΙΘΜΟΣ ΜΗΤΡΩΟΥ: *ΕΤΟΣ ΣΠΟΥΔΩΝ*:

ΘΕΜΑ 1[2]

Αν η κυματοσυνάρτηση ενός ελεύθερου σωμάτιου είναι της μορφής, $\psi(x,t)=\frac{N}{\sqrt{\alpha(t)}}e^{-x^2/2\alpha(t)}$.

Να βρεθεί το $\alpha(t)$ αν $\alpha(0)=1$.

Ακολουθεί την χρονοεξαρτημένη εξίσωση Schrödinger: $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}$ (*)

$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{N}{2}\alpha^{-3/2}\dot\alpha e^{-x^2/2\alpha}+N\alpha^{-1/2}\left(-\frac{x^2}{2}(-\alpha^{-2})\dot\alpha\right)=-\frac{\dot\alpha}{2\alpha}\psi+\frac{x^2}{2}\frac{\dot\alpha}{\alpha^2}\psi$ (1)

$\frac{\partial\psi}{\partial x}=N\alpha^{-1/2}\left(-\frac{2x}{2\alpha}\right)e^{-x^2/2\alpha}=-Nx\alpha^{-3/2}e^{-x^2/2\alpha}$

$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=-N\alpha^{-3/2}e^{-x^2/2\alpha}+N\frac{\alpha^{-1/2}}{\alpha^2}x^2e^{-x^2/2\alpha}=-\frac{1}{\alpha}\psi+\frac{x^2}{\alpha^2}\psi$ (2)

Από (1) & (2) για να ισχύει η (*) πρέπει $-\frac{\hbar^2}{2m}\left[-\frac{1}{\alpha}\right]=i\hbar\left[-\frac{\dot\alpha}{2\alpha}\right]\Rightarrow$

$\Rightarrow \dot\alpha=i\hbar/m \rightarrow d\alpha=\frac{i\hbar}{m}dt \rightarrow \boxed{\alpha(t)=\alpha(0)+\frac{i\hbar t}{m}=1+\frac{i\hbar t}{m}}$

ΘΕΜΑ 2[2]

Να συγκριθούν οι αβεβαιότητες ενέργειας των καταστάσεων $\psi_a=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1+c\psi_2$ και $\psi_b=\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}\psi_1-c^*\psi_2$ όπου οι ψ_1, ψ_2 είναι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή της Χαμιλτονανής.

$P_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$ αρα $P_2=\frac{1}{2}$

$P_1=\frac{e^{-i\varphi}}{\sqrt{2}}\frac{e^{i\varphi}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}$ αρα $P_2=\frac{1}{2}$

ΙΔΙΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ, ΑΡΑ ΙΔΙΕΣ ΑΒΕΒΑΙΟΤΗΤΕΣ.

ΘΕΜΑ 3[1]

Να υπολογιστεί το $d\langle x^2\rangle/dt$ την χρονική στιγμή $\bar t$ για την οποία ισχύει ότι $\langle x\cdot p\rangle(\bar t)=-\langle p\cdot x\rangle(\bar t)$.

$\frac{d\langle x^2\rangle}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\langle[x^2,H]\rangle=\frac{1}{i\hbar}\langle[x^2,\frac{p^2}{2m}+V(x)]\rangle=\frac{1}{i\hbar}\langle[x^2,\frac{p^2}{2m}]\rangle=$

$=\frac{1}{i\hbar}\frac{1}{2m}\langle[x^2,p^2]\rangle=\frac{1}{2i\hbar m}\langle[x^2,p^2]\rangle=\frac{1}{2i\hbar m}\left\langle\left(x[x,p^2]+[x,p^2]x\right)\right\rangle=$

$=\frac{1}{2im\hbar}\left\langle x\frac{\partial p^2}{\partial p}i\hbar+i\hbar\frac{\partial p^2}{\partial p}x\right\rangle=\frac{1}{m}\langle xp+px\rangle=\frac{1}{m}\left(\langle xp\rangle+\langle px\rangle\right)\Rightarrow$

$\frac{d\langle x^2\rangle(\bar t)}{dt}=\frac{1}{m}\left(\langle xp\rangle(\bar t)+\langle px\rangle(\bar t)\right)=\frac{1}{m}\left(\langle xp\rangle(\bar t)-\langle xp\rangle(\bar t)\right)=0$

κλό εκφώνηση

ΘΕΜΑ 4[1+2]

Έστω ότι η Χαμιλτονιανή ενός κβαντικού συστήματος είναι $\hat{H} = \varepsilon|2\rangle\langle 2| + \gamma|1\rangle\langle 2| + \delta|2\rangle\langle 1|$,

όπου τα διανύσματα $|1\rangle, |2\rangle$ είναι ιδιοδιανύσματα ενός ερμιτιανού τελεστή.

Να βρεθούν **(α)** η σχέση που συνδέει τα γ, δ και **(β)** οι ιδιοτιμές της ενέργειας.

(α) Η είναι ερμιτιανός άρα $H_{12} = H_{21}^* \rightarrow \delta = \gamma^*$

(β) Ο πίνακας Hij είναι $\begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ \gamma^* & \varepsilon \end{bmatrix}$.

Οι ιδιοτιμές βρίσκονται με διαγωνοποίηση:

$$\det \begin{bmatrix} -\lambda & \gamma \\ \gamma^* & \varepsilon-\lambda \end{bmatrix} = 0 \rightarrow (\lambda-\varepsilon)\lambda - \gamma\gamma^* = 0 \rightarrow \lambda^2 - \varepsilon\lambda - |\gamma|^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4|\gamma|^2}}{2} \quad \text{οι ιδιοτιμές της ενέργειας.}$$

ΘΕΜΑ 5[2]

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται περιορισμένο σε συμμετρικό απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού εύρους L. Η αρχική κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου είναι $\psi(x, t=0) = \cos\frac{\pi x}{L}\left(1 + 2\cdot\sin\frac{\pi x}{L}\right)/\sqrt{L}$. Ποιά είναι η μέση αρτιότητα (parity) την τυχαία χρονική στιγμή t;

$$\psi(x,0) = \cos\frac{\pi x}{L}\left(1 + 2\sin\frac{\pi x}{L}\right)\frac{1}{\sqrt{L}} = \frac{1}{\sqrt{L}}\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{\sqrt{L}}2\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi x}{L} =$$

$$\left(\sin\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\cos\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L} =$$

$$= \frac{\psi_1}{\sqrt{2}} + \frac{\psi_2}{\sqrt{2}} \qquad (\psi_1: \text{θεμελιώδη},\ \psi_2: \text{1η διεγερμένη})$$

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} \qquad (c_1 = c_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}})$$

$$\langle P \rangle = |c_1|^2 P_{11} + |c_2|^2 P_{22} + c_1^* c_2 e^{i(E_1 - E_2)t/\hbar} P_{12} + c_1 c_2^* e^{i(E_2 - E_1)t/\hbar} P_{21} =$$

$$= \frac{1}{2}[P_{11} + P_{22}] + \frac{1}{2}\left[e^{-i\omega t}P_{12} + e^{+i\omega t}P_{21}\right] \quad \left\{\text{όπου } \omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar}\right\}$$

(τελεστή parity) Έχουμε

$$P_{11} = (\psi_1, P\psi_1) = \int \psi_1(x)\, P(\psi_1(x))dx = \int \psi_1 \psi_1\, dx = 1$$

$$P_{22} = (\psi_2, P\psi_2) = \int \psi_2\, P\psi_2\, dx = \int \psi_2(-\psi_2)dx = -\int \psi_2 \psi_2 dx = -1$$

$$P_{12} = (\psi_1, P\psi_2) = \int \psi_1(-\psi_2)dx = -\int \psi_1 \psi_2\, dx = 0$$

$$P_{21} = 0 \text{ (προφανώς!)}$$

Άρα $\langle P \rangle(t) = \frac{1}{2}[1 - 1] = \frac{1}{2}(0) = 0$

Αυτό μου καθώς έχουμε με ίση πιθανότητα ($P_1 = P_2 = \frac{1}{2}$) άρτια (θεμελιώδη) και περιττή (πρώτη διεγερμένη) κατάσταση