ΚΒΑΝΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ Ι

Τελική (επί πτυχίω) Εξέταση: 17 Ιούνη 2013 (Διδάσκων: Α.Φ. Τερζής)

ΘΕΜΑ 1[1+0.5+1+0.5]

Θεωρούμε κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή,

$H = 4\varepsilon\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\right) + 3i\varepsilon\left(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|\right)$,

με $|1\rangle$, $|2\rangle$ ιδιοσυναρτήσεις κάποιου ερμιτιανού τελεστή και ε πραγματικός.

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας.
(β) Να επαληθευτεί ότι έχετε βρει τις σωστές ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα δείχνοντας ότι ισχύουν οι σχέσεις που περιγράφουν το πρόβλημα ιδιοτιμών της ενέργειας, δηλαδή

$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle$, όπου E η ιδιοτιμή και $|\psi\rangle$ η ιδοσυνάρτηση.

Θεωρούμε ένα φυσικό μέγεθος που περιγράφονται από τον τελεστή A από την σχέση

$A = a\left(9|1\rangle\langle 1| + \mu|1\rangle\langle 2| - 3i|2\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2|\right)$, όπου μ παράμετρος που μπορεί να προσδιορισθεί από βασικές γνώσεις κβαντομηχανικής και a πραγματικός.
Την χρονική στιγμή t=0, μετράμε το φυσικό μέγεθος που σχετίζονται με τον τελεστή A και βρίσκουμε μηδενική τιμή.
(γ) Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$.
(δ) Αν την χρονική στιγμή $t = 10\,ps$ μετρήσω τα φυσικά μεγέθη A και H ποιες είναι οι δυνατές μετρούμενες τιμές και με ποιες πιθανότητες;

Λύση

(α)Απαιτούμε

$$\det\begin{bmatrix} 4\varepsilon-\lambda & 3i\varepsilon \\ -3i\varepsilon & -4\varepsilon-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda+4\varepsilon)(\lambda-4\varepsilon) - 9\varepsilon^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 16\varepsilon^2 - 9\varepsilon^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{\pm} = \pm 5\varepsilon\,.$$

Για το πρώτο ιδιοδιάνυσμα (λ=+5ε) χρειάζεται να λύσω το αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 4\varepsilon-5\varepsilon & 3i\varepsilon \\ -3i\varepsilon & -4\varepsilon-5\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -\varepsilon & 3i\varepsilon \\ 3i\varepsilon & -6\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

με το περιορισμό της κανονικότητας $|x|^2 + |y|^2 = 1$ (προσοχή, x, y είναι γενικά μιγαδικοί).

Για το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα (λ=-5ε) χρειάζεται να λύσω το αλγεβρικό σύστημα:

$$\begin{bmatrix} 4\varepsilon+5\varepsilon & 3i\varepsilon \\ -3i\varepsilon & -4\varepsilon+5\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 9\varepsilon & 3i\varepsilon \\ 3i\varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

με το περιορισμό της κανονικότητας $|x'|^2 + |y'|^2 = 1$ (προσοχή, x', y' είναι γενικά μιγαδικοί).

Οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας είναι $|\psi_+\rangle = \dfrac{3i|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{10}}$, $\quad |\psi_-\rangle = \dfrac{|1\rangle + 3i|2\rangle}{\sqrt{10}}$.

(β) Για την λ=+5ε και $|\psi_+\rangle$ έχουμε

$$H|\psi_+\rangle = \left[4\varepsilon\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\right) + 3i\varepsilon\left(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|\right)\right]\left(\frac{3i|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$\left[4\varepsilon\left(3i|1\rangle\langle 1||1\rangle - |2\rangle\langle 2||2\rangle\right) + 3i\varepsilon\left(|1\rangle\langle 2||2\rangle - 3i|2\rangle\langle 1||1\rangle\right)\right] / \sqrt{10} =$$

$$\left[4\varepsilon\left(3i|1\rangle - |2\rangle\right) + 3i\varepsilon\left(|1\rangle - 3i|2\rangle\right)\right] / \sqrt{10} = \left[5\varepsilon 3i|1\rangle + 5\varepsilon|2\rangle\right] / \sqrt{10} =$$

$$5\varepsilon\left(\frac{3i|1\rangle + |2\rangle}{\sqrt{10}}\right) = 5\varepsilon|\psi_+\rangle$$

Για την λ=-5ε και $|\psi_-\rangle$ έχουμε

$$H|\psi_-\rangle = \left[4\varepsilon\left(|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|\right) + 3i\varepsilon\left(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|\right)\right]\left(\frac{|1\rangle + 3i|2\rangle}{\sqrt{10}}\right) =$$

$$\left[4\varepsilon\left(|1\rangle\langle 1||1\rangle - 3i|2\rangle\langle 2||2\rangle\right) + 3i\varepsilon\left(3i|1\rangle\langle 2||2\rangle - |2\rangle\langle 1||1\rangle\right)\right] / \sqrt{10} =$$

$$\left[4\varepsilon\left(|1\rangle - 3i|2\rangle\right) + 3i\varepsilon\left(3i|1\rangle - |2\rangle\right)\right] / \sqrt{10} = \left[-5\varepsilon|1\rangle - 5\cdot 3i\varepsilon|2\rangle\right] / \sqrt{10} =$$

$$-5\varepsilon\left(\frac{|1\rangle + 3i|2\rangle}{\sqrt{10}}\right) = -5\varepsilon|\psi_-\rangle$$

(γ) Έχουμε λόγω της ερμιτιανότητας ότι $\mu = (-3i)^* = 3i$.

$$\det\begin{bmatrix} 9a-\lambda & 3ia \\ -3ia & a-\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (\lambda - 9a)(\lambda - a) - 9a^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 10a\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0,10a\,.$$

Για το πρώτο ιδιοδιάνυσμα (λ=0) χρειάζεται να λύσω το αλγεβρικό σύστημα:

$\begin{bmatrix} 9a & 3ia \\ -3ia & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, που δίνει το $\frac{|1\rangle + 3i|2\rangle}{\sqrt{10}}$ το οποίο είναι το $|\psi_-\rangle$.

Ενώ ανάλογα βρίσκουμε ότι για το δεύτερο ιδιοδιάνυσμα είναι το $|\psi_+\rangle$

Οπότε αφού κατά την μέτρηση βρίσκουμε την μηδενική ιδιοτιμή η κυματοσυνάρτηση είναι $|\Psi(x,t=0)\rangle = |\psi_-\rangle$.

Καθώς η αρχική κατάσταση είναι μια ιδοακατάσταση της ενέργειας έχουμε μια στάσιμη κατάσταση και $|\Psi(x,t)\rangle = |\Psi(x,t=0)\rangle = |\psi_-\rangle$.

(δ) Καθώς έχουμε στάσιμη κατάσταση η ενέργεια θα βρίσκεται πάντα στην ιδιοκατάσταση $|\psi_-\rangle$ και η μετρηση θα δίνει με 100% πιθανότητα η μέτρηση τιμή -5ε. Προφανώς για τους ίδιους λόγους και ο τελεστής A θα μετρίεται πάντα με μηδενική τιμή.

ΘΕΜΑ 2[1.5]

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται σε δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού και περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\psi(x,t=0) = \frac{1}{\sqrt{2nm}}\sin\frac{\pi x}{2nm}\left[1 + 2\cos\frac{\pi x}{2nm}\right]$.

(α) Να προσδιοριστεί η $\psi(x,t)$.

(β) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του συστήματος σε *meV*.

<u>Λύση</u>

(α) Έχουμε

$$\psi(x,t=0) = \sin\frac{\pi x}{L}(1 + 2\cos\frac{\pi x}{L})/\sqrt{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}2\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi x}{L} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L} = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2,$$

όπου L=2nm.

Άρα $\psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 e^{-iE_2 t/\hbar} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L}e^{-iE_2 t/\hbar}$.

(β) Καθώς έχουμε τις δύο ενεργειακές καταστάσεις απειρόβαθου πηγαδιού με $c_1 = c_2 = 1/\sqrt{2} \Rightarrow P_1 = P_2 = 1/2$, δηλαδή ισοπίθανες ενεργειακές καταστάσεις, έτσι $\langle E\rangle = P_1E_1 + P_2E_2 = 0.5(E_1 + E_2)$.

Οπότε καθώς $\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2} \approx 94meV$, και $\langle E\rangle = 0.5(E_1 + 4E_1) = 2.5\cdot 94meV = 235meV$.

ΘΕΜΑ 3[0.25+1+0.5+1.25]

Θεωρούμε μονοδιάστατο κβαντικό σύστημα στο οποίο υπάρχει σωμάτιο μάζας *m*. Αν η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι $V(x) = c_{-L}\delta(x+L) + c_{+L}\delta(x-L)$, με $c_{-L} > 0,\ c_{+L} < 0$.

(α) Να εξηγήσετε με φυσικά επιχειρήματα για ποιες τιμές της ολικής ενέργειας του συστήματος έχουμε δέσμιες καταστάσεις και για ποιες καταστάσεις σκέδασης.

Μελέτη δέσμιων καταστάσεων.

(β) Να βρεθεί η συνθήκη από την οποία εκτιμώνται οι δυνατές ενεργειακές καταστάσεις για την περίπτωση των δέσμιων καταστάσεων.

(γ) Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του (β) ερωτήματος και στην ειδική περίπτωση όπου $L = 0$, να βρείτε ποια σχέση πρέπει να ισχύει μεταξύ των παραμέτρων του δυναμικού για να έχουμε δέσμιες καταστάσεις.

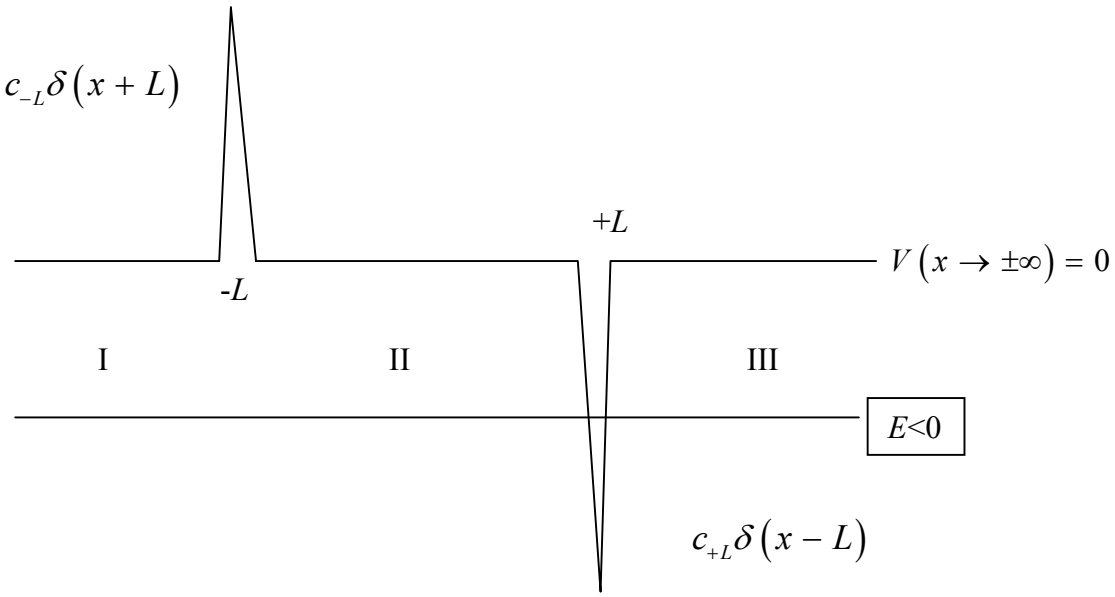
Μελέτη καταστάσεων σκέδασης στην ειδική περίπτωση που $|c_{+L}| = c_{-L}\ (= c)$.

(δ) Να μελετηθεί η σκέδαση, δηλαδή εύρεση του R ή του T για δέσμη που ξεκινά από το $+\infty$.

<u>Λύση</u>

(α) Οι δέσμιες καταστάσεις αντιστοιχούν σε αρνητικές ενέργειες, καθώς σε αυτή την περίπτωση $E < V(\pm\infty) = 0$. Για θετικές ενέργειες έχουμε καταστάσεις σκέδασης.

(β)



Οι κυματοσυναρτήσεις στις περιοχές I,II και III, για να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες είναι της μορφής $\Psi_I = Ae^{\gamma x}, \Psi_{II} = B_+e^{\gamma x} + B_-e^{-\gamma x}, \Psi_{III} = Ce^{-\gamma x},$ όπου $\gamma = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}} > 0$.

Η συνέχεια των κυματοσυναρτήσεων στο *x*=-*L* και *L* δίνει

$\Psi_I(-L) = \Psi_{II}(-L) \Rightarrow Ae^{-\gamma L} = B_+e^{-\gamma L} + B_-e^{\gamma L}$ (1)

$\Psi_{III}(L) = \Psi_{II}(L) \Rightarrow Ce^{-\gamma L} = B_+e^{\gamma L} + B_-e^{-\gamma L}$ (2)

Ενώ από την ασυνέχεια των παραγώγων έχουμε

$$\Psi'_{II}(-L)-\Psi'_{I}(-L)=\frac{2mc_{-L}}{\hbar^2}\Psi(-L)\Rightarrow \gamma(B_+e^{-\gamma L}-B_-e^{\gamma L})-\gamma Ae^{-\gamma L}=\frac{2mc_{-L}}{\hbar^2}Ae^{-\gamma L}$$

$$\Rightarrow B_+e^{-\gamma L}-B_-e^{\gamma L}=\left(1+\frac{2mc_{-L}}{\gamma\hbar^2}\right)Ae^{-\gamma L}\Rightarrow B_+e^{-\gamma L}-B_-e^{\gamma L}=w_{-L}Ae^{-\gamma L} \qquad (3)$$

$$\Psi'_{III}(L)-\Psi'_{II}(L)=\frac{2mc_{+L}}{\hbar^2}\Psi(L)\Rightarrow \gamma(B_+e^{\gamma L}-B_-e^{-\gamma L})+\gamma Ce^{-\gamma L}=-\frac{2mc_{+L}}{\hbar^2}Ce^{-\gamma L}$$

$$\Rightarrow B_+e^{\gamma L}-B_-e^{-\gamma L}=-\left(1+\frac{2mc_{+L}}{\gamma\hbar^2}\right)Ce^{-\gamma L}=-w_{+L}Ce^{-\gamma L} \qquad (4)$$

Όλες οι σχέσεις μαζί γράφονται ως εξής

$$B_+e^{-\gamma L}+B_-e^{\gamma L}=Ae^{-\gamma L} \qquad (1')$$

$$B_+e^{-\gamma L}-B_-e^{\gamma L}=w_{-L}Ae^{-\gamma L} \qquad (2')$$

$$B_+e^{\gamma L}+B_-e^{-\gamma L}=Ce^{-\gamma L} \qquad (3')$$

$$B_+e^{\gamma L}-B_-e^{-\gamma L}=-w_{+L}Ce^{-\gamma L} \qquad (4')$$

Μπορούμε να απαλείψουμε τους συντελεστές A και C

$$\frac{(2')}{(1')}\Rightarrow\frac{B_+e^{-\gamma L}-B_-e^{\gamma L}}{B_+e^{-\gamma L}+B_-e^{\gamma L}}=w_{-L}\Rightarrow\frac{re^{-2\gamma L}-1}{re^{-2\gamma L}+1}=w_{-L}\Rightarrow r\left[\equiv\frac{B_+}{B_-}\right]=\left(\frac{w_{-L}+1}{1-w_{-L}}\right)e^{2\gamma L}$$

$$\frac{(4')}{(3')}\Rightarrow\frac{B_+e^{\gamma L}-B_-e^{-\gamma L}}{B_+e^{\gamma L}+B_-e^{-\gamma L}}=-w_{+L}\Rightarrow\frac{re^{2\gamma L}-1}{re^{2\gamma L}+1}=-w_{+L}\Rightarrow r=\left(\frac{1-w_{+L}}{1+w_{+L}}\right)e^{-2\gamma L}$$

Από την ισότητα των δύο διαφορετικών εκφράσεων για το r, βρίσκουμε

$$\left(\frac{w_{-L}+1}{1-w_{-L}}\right)e^{2\gamma L}=\left(\frac{1-w_{+L}}{1+w_{+L}}\right)e^{-2\gamma L}\Rightarrow\frac{2+\frac{2mc_{-L}}{\gamma\hbar^2}}{-\frac{2mc_{-L}}{\gamma\hbar^2}}=\left(\frac{-\frac{2mc_{+L}}{\gamma\hbar^2}}{2+\frac{2mc_{+L}}{\gamma\hbar^2}}\right)e^{-4\gamma L}\Rightarrow\frac{\left(1+\frac{mc_{-L}}{\gamma\hbar^2}\right)\left(1+\frac{mc_{+L}}{\gamma\hbar^2}\right)}{\frac{m^2c_{-L}c_{+L}}{\gamma^2\hbar^4}}=e^{-4\gamma L}$$

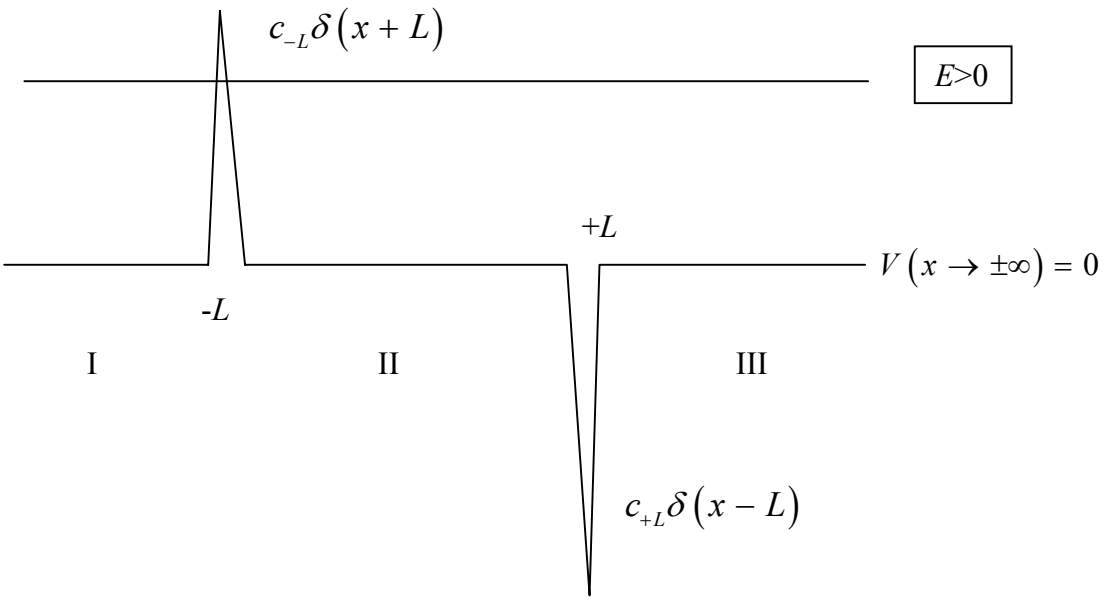
(γ) Στην ειδική περίπτωση $L=0$, έχουμε

$$\frac{\left(1+\frac{mc_{-L}}{\gamma\hbar^2}\right)\left(1+\frac{mc_{+L}}{\gamma\hbar^2}\right)}{\frac{m^2c_{-L}c_{+L}}{\gamma^2\hbar^4}}=e^{-4\gamma 0}\Rightarrow 1+\frac{m\left(c_{-L}+c_{+L}\right)}{\gamma\hbar^2}=0\Rightarrow\frac{m\left(c_{-L}+c_{+L}\right)}{\gamma\hbar^2}=-1.$$

Δηλαδή όπως αναμενόταν έχουμε το αποτέλεσμα ενός δέλτα δυναμικού με ένταση $c_{-L}+c_{+L}$.

Για να έχουμε δέσμια κατάσταση πρέπει $c_{-L}+c_{+L}<0$.

(δ)



Οι κυματοσυναρτήσεις στις περιοχές I, II και III, για σκέδαση από αριστερά (δηλαδή από περιοχή III προς I) είναι της μορφής

$$\Psi_I = Ae^{-ikx}, \Psi_{II} = B_+e^{ikx} + B_-e^{-ikx}, \Psi_{III} = e^{-ikx} + Ce^{ikx}, \text{ όπου } k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} > 0 .$$

Η συνέχεια των κυματοσυναρτήσεων στο x=-L και L δίνει

$$\Psi_I(-L) = \Psi_{II}(-L) \Rightarrow Ae^{ikL} = B_+e^{-ikL} + B_-e^{ikL} \qquad (1)$$

$$\Psi_{III}(L) = \Psi_{II}(L) \Rightarrow e^{-ikL} + Ce^{ikL} = B_+e^{ikL} + B_-e^{-ikL} \qquad (2)$$

Ενώ από την ασυνέχεια των παραγώγων έχουμε

$$\Psi'_{II}(-L) - \Psi'_I(-L) = \frac{2mc_{-L}}{\hbar^2}\Psi(-L) \Rightarrow ik(B_+e^{-ikL} - B_-e^{ikL}) + ikAe^{ikL} = \frac{2mc_{-L}}{\hbar^2}Ae^{ikL}$$

$$\Rightarrow B_+e^{-ikL} - B_-e^{ikL} = \left(\frac{2mc_{-L}}{ik\hbar^2} - 1\right)Ae^{ikL} \Rightarrow B_+e^{-ikL} - B_-e^{ikL} = w_{-L}Ae^{ikL} \qquad (3)$$

$$\Psi'_{III}(L) - \Psi'_{II}(L) = \frac{2mc_{+L}}{\hbar^2}\Psi(L) \Rightarrow ik(B_+e^{ikL} - B_-e^{-ikL}) - ik(-e^{-ikL} + Ce^{ikL}) = -\frac{2mc_{+L}}{\hbar^2}(e^{-ikL} + Ce^{ikL})$$

$$\Rightarrow B_+e^{ikL} - B_-e^{-ikL} = -\left(1 + \frac{2mc_{+L}}{ik\hbar^2}\right)e^{-ikL} + \left(1 - \frac{2mc_{+L}}{ik\hbar^2}\right)Ce^{ikL} = w^+_{-L}e^{-ikL} + w^-_{-L}Ce^{ikL} \qquad (4)$$

Διαιρούμε την (3) με την (1) και βρίσκουμε τον λόγο B_+ / B_-, δηλαδή

$$\frac{B_+e^{-ikL} - B_-e^{ikL}}{B_+e^{-ikL} + B_-e^{ikL}} = \frac{w_{-L}Ae^{ikL}}{Ae^{ikL}} = w_{-L} \Rightarrow \frac{B_+}{B_-} = \left(\frac{1+w_{-L}}{1-w_{-L}}\right)e^{i2kL} .$$

Διαιρούμε την (4) με την (2) και χρησιμοποιώντας τον γνωστό λόγο B_+ / B_- βρίσκουμε το C, δηλαδή

$$\frac{B_+/B_-e^{ikL} - B_-/B_-e^{-ikL}}{B_+/B_-e^{ikL} + B_-/B_-e^{-ikL}} = \frac{w^+_{-L}e^{-ikL} + w^-_{-L}Ce^{ikL}}{e^{-ikL} + Ce^{ikL}} \Rightarrow \frac{\left(\frac{1+w_{-L}}{1-w_{-L}}\right)e^{i4kL} - 1}{\left(\frac{1+w_{-L}}{1-w_{-L}}\right)e^{i4kL} + 1} = \frac{w^+_{-L} + w^-_{-L}Ce^{i2kL}}{1 + Ce^{i2kL}} \Rightarrow$$

$$(1+w_{-L})e^{i4kL} - (1-w_{-L}) + (1+w_{-L})e^{i6kL}C - (1-w_{-L})e^{i2kL}C = (1+w_{-L})w^+_{-L}e^{i4kL} + (1-w_{-L})w^+_{-L} + (1+w_{-L})w^-_{-L}e^{i6kL}C + (1-w_{-L})w^-_{-L}e^{i2kL}C$$

$$(1+w_{-L})e^{i6kL}C - (1-w_{-L})e^{i2kL}C - (1+w_{-L})w^-_{-L}e^{i6kL}C - (1-w_{-L})w^-_{-L}e^{i2kL}C = -(1+w_{-L})e^{i4kL} + (1-w_{-L}) + (1+w_{-L})w^+_{-L}e^{i4kL} + (1-w_{-L})w^+_{-L}$$

$$(1+w_{-L})(1-w^-_{-L})e^{i6kL}C - (1-w_{-L})(1+w^-_{-L})e^{i2kL}C = (1+w_{-L})(w^+_{-L}-1)e^{i4kL} + (1-w_{-L})(1+w^+_{-L}) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{2mc_{-L}}{ik\hbar^2}\right)\left(\frac{2mc_{+L}}{ik\hbar^2}\right)e^{i6kL}C - \left(2 - \frac{2mc_{-L}}{ik\hbar^2}\right)\left(2 - \frac{2mc_{+L}}{ik\hbar^2}\right)e^{i2kL}C = \left(\frac{2mc_{-L}}{ik\hbar^2}\right)\left(-\frac{2mc_{+L}}{ik\hbar^2} - 2\right)e^{i4kL} + \left(2 - \frac{2mc_{-L}}{ik\hbar^2}\right)\left(-\frac{2mc_{+L}}{ik\hbar^2}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\frac{mc_{-L}}{ik\hbar^2}\right)\left(\frac{mc_{+L}}{ik\hbar^2}\right)e^{i6kL}C - \left(1 - \frac{mc_{-L}}{ik\hbar^2}\right)\left(1 - \frac{mc_{+L}}{ik\hbar^2}\right)e^{i2kL}C = -\left(\frac{mc_{-L}}{ik\hbar^2}\right)\left(1 + \frac{mc_{+L}}{ik\hbar^2}\right)e^{i4kL} - \left(1 - \frac{mc_{-L}}{ik\hbar^2}\right)\left(\frac{mc_{+L}}{ik\hbar^2}\right) \Rightarrow$$

$$C = \frac{\left(\frac{mc_{-L}}{ik\hbar^2}\right)\left(1 + \frac{mc_{+L}}{ik\hbar^2}\right)e^{i4kL} + \left(1 - \frac{mc_{-L}}{ik\hbar^2}\right)\left(\frac{mc_{+L}}{ik\hbar^2}\right)}{\left(1 - \frac{mc_{-L}}{ik\hbar^2}\right)\left(1 - \frac{mc_{+L}}{ik\hbar^2}\right)e^{i2kL} - \left(\frac{mc_{-L}}{ik\hbar^2}\right)\left(\frac{mc_{+L}}{ik\hbar^2}\right)e^{i6kL}}$$

Στην ειδική περίπτωση που $|c_{+L}| = c_{-L}\,(= c)$.

$$C = \frac{\left(-\frac{mc}{ik\hbar^2}\right)\left(1 + \frac{mc}{ik\hbar^2}\right)e^{i4kL} + \left(1 + \frac{mc}{ik\hbar^2}\right)\left(\frac{mc}{ik\hbar^2}\right)}{\left(1 + \frac{mc}{ik\hbar^2}\right)\left(1 - \frac{mc}{ik\hbar^2}\right)e^{i2kL} - \left(\frac{-mc}{ik\hbar^2}\right)\left(\frac{mc}{ik\hbar^2}\right)e^{i6kL}} = \left[a \equiv \frac{mc}{\hbar^2}\right]\frac{\left(\frac{ia}{k}\right)\left(1 - \frac{ia}{k}\right)\left(e^{i4kL} - 1\right)}{\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)e^{i2kL} - \frac{a^2}{k^2}e^{i6kL}} = \frac{\left(\frac{ia}{k}\right)\left(1 - \frac{ia}{k}\right)2i\sin 2kL}{\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) - \frac{a^2}{k^2}e^{i4kL}} \Rightarrow$$

$$R = |C|^2 = C^*C = \frac{\left(-\frac{a}{k}\right)\left(1 + \frac{ia}{k}\right)2\sin 2kL}{\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) - \frac{a^2}{k^2}e^{-i4kL}}\frac{\left(-\frac{a}{k}\right)\left(1 - \frac{ia}{k}\right)2\sin 2kL}{\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) - \frac{a^2}{k^2}e^{i4kL}} = \frac{4\left(\frac{a^2}{k^2}\right)\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\sin^2 2kL}{\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)^2 + \frac{a^4}{k^4} - 2\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right)\frac{a^2}{k^2}\cos 4kL}$$

Στην ειδική περίπτωση $L = 0$, έχουμε όπως αναμένεται μηδενική ανάκλαση.

ΘΕΜΑ 4[0.5+1+0.5]

Ένας κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)=\left(\psi_0 e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}-\sqrt{2}\psi_1 e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}\right)/\sqrt{3}.$

(α) Υπολογίστε την μέση τιμή της ορμής για t=0.

(β) Υπολογίστε την χρονοεξαρτώμενη μέση τιμή της θέσης χρησιμοποιώντας τους τελεστές a, a^+.

(γ) Αν γνωρίζουμε ότι η μέση ενέργεια είναι 70meV πόσο είναι η ε_0 σε meV;

<u>Λύση</u>

(α) Από την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x,t)=\left(\psi_0 e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}-\sqrt{2}\psi_1 e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}\right)/\sqrt{3},$ βρίσκουμε $c_0=1/\sqrt{3},\ c_1=\sqrt{2}/\sqrt{3}$. Η κυματοσυνάρτηση για t=0 είναι $\Psi(x,t=0)=\left(\psi_0-\sqrt{2}\psi_1\right)/\sqrt{3},$ *πραγματική* άρα η μέση ορμή είναι μηδέν, Ακόμα (2^{η} μέθοδος) γνωρίζουμε ότι $\langle p\rangle=2|c_0||c_1||p_{01}|\sin\delta$, με $\delta=0\Rightarrow\sin\delta=0$ και άρα $\langle p\rangle=0.$

(β) Η κυματοσυνάρτηση είναι $|\Psi\rangle=\left(e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}|0\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}|1\rangle\right)/\sqrt{3}$ (φορμαλισμος Dirac), έτσι

$$\langle x\rangle=\langle\Psi|\frac{a+a^+}{\sqrt{2}}|\Psi\rangle=\left(e^{i\varepsilon_0 t/\hbar}\langle 0|-\sqrt{2}e^{i\varepsilon_1 t/\hbar}\langle 1|\right)\left[\frac{a+a^+}{3\sqrt{2}}\right]\left(e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}|0\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}|1\rangle\right)=$$

$$\left(e^{i\varepsilon_0 t/\hbar}\langle 0|-\sqrt{2}e^{i\varepsilon_1 t/\hbar}\langle 1|\right)\left(e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}a^+|0\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}a|1\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}a^+|1\rangle\right)/3\sqrt{2}=$$

$$\left(e^{i\varepsilon_0 t/\hbar}\langle 0|-\sqrt{2}e^{i\varepsilon_1 t/\hbar}\langle 1|\right)\left(e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}|1\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}|0\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}\sqrt{2}|2\rangle\right)/3\sqrt{2}=$$

$$\left(e^{i\varepsilon_0 t/\hbar}\langle 0|-\sqrt{2}e^{i\varepsilon_1 t/\hbar}\langle 1|\right)\left(e^{-i\varepsilon_0 t/\hbar}|1\rangle-\sqrt{2}e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}|0\rangle-2e^{-i\varepsilon_1 t/\hbar}|2\rangle\right)/3\sqrt{2}=$$

$$\left(\langle 0|1\rangle-\sqrt{2}e^{-i(\varepsilon_1-\varepsilon_0)t/\hbar}\langle 0|0\rangle-2e^{-i(\varepsilon_1-\varepsilon_0)t/\hbar}\langle 0|2\rangle-\sqrt{2}e^{-i(\varepsilon_0-\varepsilon_1)t/\hbar}\langle 1|1\rangle+2\langle 1|0\rangle-2\sqrt{2}\langle 1|2\rangle\right)/3\sqrt{2}=$$

$$=\left(-\sqrt{2}e^{-i(\varepsilon_1-\varepsilon_0)t/\hbar}-\sqrt{2}e^{-i(\varepsilon_0-\varepsilon_1)t/\hbar}\right)/3\sqrt{2}=-2\cos\left(\left(\varepsilon_1-\varepsilon_0\right)t/\hbar\right)/3$$

‘Η $-2\cos(t)/3$,

στο φυσικό σύτημα μονάδων όπου ο χρόνος δίνεται σε μονάδες αντίστροφης κυκλικής συχνότητας.

(γ)Έχουμε

$$\langle E\rangle=P_0E_0+P_1E_1=(1/3)(1/2)+(2/3)(3/2)=\frac{7}{6}\Rightarrow\langle E\rangle=\frac{7}{6}\hbar\omega_0=70meV\Rightarrow\hbar\omega_0=60meV.$$

Οπότε $\varepsilon_0=\hbar\omega_0/2=60meV/2=30meV$.

Πάτρα, 17/6/2013