ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Τελική Εξέταση: 7 Φλεβάρη 2011 (Διδάσκων: Α.Φ. Τερζής). Διάρκεια εξέτασης ***2,5 ώρες.***

ΘΕΜΑ 1[1.0+0.5+0.5+0.5+0.5**+0.5**]

Θεωρούμε κβαντικό σύστημα και διάφορα φυσικά μεγέθη που περιγράφονται από τους τελεστές *A*, *B* και *C*.
Για τον τελεστή Α θεωρούμε ότι το πρόβλημα ιδιοτιμών του είναι λυμένο και περιγράφεται από τις σχέσεις $A|1\rangle = a_1|1\rangle, A|2\rangle = a_2|2\rangle$.

Επιπλέον γνωρίζουμε ότι $B = b|1\rangle\langle 1|$ και $C = ib\delta\left(|-\rangle\langle +|-|+\rangle\langle -|\right)/\hbar$, όπου τα διανύσματα $|+\rangle,|-\rangle$, ορίζονται ως $|+\rangle = \left(|1\rangle + |2\rangle\right)/\sqrt{2}, |-\rangle = \left(|1\rangle - |2\rangle\right)/\sqrt{2}$.

Τέλος γνωρίζουμε ότι η Χαμιλτονιανή του κβαντικού συστήματος είναι $\hat{H} = \varepsilon|1\rangle\langle 1| + \varepsilon|2\rangle\langle 2| + \delta|1\rangle\langle 2| + \delta|2\rangle\langle 1|$.

(α) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή της ενέργειας.

(β) Να αποδειχθεί ότι $\frac{d}{dt} < B >= - < C >$.

Την χρονική στιγμή *t*=0, μετράμε τα φυσικά μεγέθη που σχετίζονται με τους τελεστές *A* και *B* και βρίσκουμε τις τιμές a_1 και *b*, αντίστοιχα.

(γ) Να βρεθεί η κυματοσυνάρτηση του συστήματος την τυχαία χρονική στιγμή $t > 0$.

(δ) Να βρεθεί την ίδια χρονική στιγμή η μέση τιμή των τελεστών *B* και *C*.

(ε) Αν την χρονική στιγμή $t = h/\delta$ μετρήσω τα φυσικά μεγέθη *A*,*B* και *H* ποιες είναι οι δυνατές μετρούμενες τιμές και με ποιες πιθανότητες;

(στ) **Ερώτηση-«bonus»**. Εξηγείστε πως είναι δυνατόν ο συντελεστής ($ib\delta/\hbar$) στον ορισμό του τελεστή *C* να είναι φανταστικός αριθμός;

Λύση

(α) Οι ιδοτιμές της ενέργειας είναι $\varepsilon - \delta, \varepsilon + \delta$ με ιδιοσυναρτήσεις τις $|+\rangle,|-\rangle$, αντίστοιχα (βλέπε μάθημα 18ο, ασκήσεις 14 και 15).

(β) Έχουμε $\frac{d}{dt} < B >= \frac{1}{i\hbar} < [B,H] >$.

$$[\hat{B},\hat{H}] = \hat{B}\hat{H} - \hat{H}\hat{B} =$$
$$\left(b|1\rangle\langle 1|\right)\left(\varepsilon|1\rangle\langle 1| + \varepsilon|2\rangle\langle 2| + \delta|1\rangle\langle 2| + \delta|2\rangle\langle 1|\right) - \left(\varepsilon|1\rangle\langle 1| + \varepsilon|2\rangle\langle 2| + \delta|1\rangle\langle 2| + \delta|2\rangle\langle 1|\right)\left(b|1\rangle\langle 1|\right) =$$
$$\varepsilon b|1\rangle\langle 1|1\rangle\langle 1| + \varepsilon b|1\rangle\langle 1|2\rangle\langle 2| + \delta b|1\rangle\langle 1|1\rangle\langle 2| + \delta b|1\rangle\langle 1|2\rangle\langle 1| -$$
$$-\varepsilon b|1\rangle\langle 1|1\rangle\langle 1| - \varepsilon b|2\rangle\langle 2|1\rangle\langle 2| - \delta b|1\rangle\langle 2|1\rangle\langle 2| - \delta b|2\rangle\langle 1|1\rangle\langle 1| =$$
$$\varepsilon b|1\rangle\langle 1| + \delta b|1\rangle\langle 2| - \varepsilon b|1\rangle\langle 1| - \delta b|2\rangle\langle 1| = \delta b|1\rangle\langle 2| - \delta b|2\rangle\langle 1|$$

Τώρα καθώς $|+\rangle = \left(|1\rangle + |2\rangle\right)/\sqrt{2}, |-\rangle = \left(|1\rangle - |2\rangle\right)/\sqrt{2} \Rightarrow |1\rangle = \left(|+\rangle + |-\rangle\right)/\sqrt{2}, |2\rangle = \left(|+\rangle - |-\rangle\right)/\sqrt{2}$ και

$$|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1| = \left[\left(|+\rangle + |-\rangle\right)\left(\langle +| - \langle -|\right) - \left(|+\rangle - |-\rangle\right)\left(\langle +| + \langle -|\right)\right]/2 =$$
$$\left[|+\rangle\langle +| - |+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -| - |+\rangle\langle +| - |+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|\right]/2 =$$
$$\left[-|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right] \Rightarrow [\hat{B},\hat{H}] = b\delta\left[|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|\right] = b\delta\left[-|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|\right] \Rightarrow$$
$$\frac{d}{dt} < B >= \frac{1}{i\hbar} < [B,H] >= \frac{b\delta}{i\hbar} < \left[|-\rangle\langle +| - |+\rangle\langle -|\right] >= - < ib\delta\left[|-\rangle\langle +| - |+\rangle\langle -|\right]/\hbar >= - < C >$$

(γ) Καθώς μετράμε τους τελεστές *A* και *B* και βρίσκουμε τις τιμές a_1 και *b* αντίστοιχα, η κυματοσυνάρτηση είναι $|\Psi(x,t=0)\rangle = |1\rangle$.

Καθώς η αρχική κατάσταση είναι $|\Psi(x,t=0)\rangle = |1\rangle = \left(|+\rangle + |-\rangle\right)/\sqrt{2}$, η κυματοσυνάρτηση για τυχαίο *t* γίνεται $|\Psi(x,t)\rangle = \left(e^{-i(\varepsilon+\delta)t/\hbar}|+\rangle + e^{-i(\varepsilon-\delta)t/\hbar}|-\rangle\right)/\sqrt{2}$, που είναι ισοδύναμη με την $|\Psi(x,t)\rangle = \left(|+\rangle + e^{-2i\delta t/\hbar}|-\rangle\right)/\sqrt{2}$.

Ισοδύναμη γραφή έχουμε με τις ιδοσυναρτήσεις $|1\rangle,|2\rangle$,

$$|\Psi(x,t)\rangle = \left(e^{-i(\varepsilon+\delta)t/\hbar}|+\rangle + e^{-i(\varepsilon-\delta)t/\hbar}|-\rangle\right)/\sqrt{2} = \left(e^{-i\delta t/\hbar}\left((|1\rangle+|2\rangle)/\sqrt{2}\right) + e^{i\delta t/\hbar}\left((|1\rangle-|2\rangle)/\sqrt{2}\right)\right)/\sqrt{2} =$$

$$\left(\left(\frac{e^{-i\delta t/\hbar}+e^{i\delta t/\hbar}}{2}\right)|1\rangle + \left(\frac{e^{-i\delta t/\hbar}-e^{i\delta t/\hbar}}{2}\right)|2\rangle\right) = \cos(\delta t/\hbar)|1\rangle - i\sin(\delta t/\hbar)|2\rangle$$

(δ) Έχουμε για τις μέσες τιμές,

$$\langle B\rangle = \langle\Psi(x,t)|B|\Psi(x,t)\rangle = \left(\cos(\delta t/\hbar)\langle 1| - i\sin(\delta t/\hbar)\langle 2|\right)B\left(\cos(\delta t/\hbar)|1\rangle - i\sin(\delta t/\hbar)|2\rangle\right) =$$

$$\cos^2(\delta t/\hbar)\langle 1|B|1\rangle - i\cos(\delta t/\hbar)\sin(\delta t/\hbar)\left(\langle 1|B|2\rangle + \langle 2|B|1\rangle\right) - \sin^2(\delta t/\hbar)\langle 2|B|2\rangle =$$

$$\cos^2(\delta t/\hbar)b\langle 1||1\rangle - i\cos(\delta t/\hbar)\sin(\delta t/\hbar)b\langle 2||1\rangle = b\cos^2(\delta t/\hbar)$$

και καθώς $|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1| = |-\rangle\langle +| - |+\rangle\langle -| \Rightarrow \hat{C} = ib\delta\left(|-\rangle\langle +| - |+\rangle\langle -|\right)/\hbar = ib\delta\left(|1\rangle\langle 2| - |2\rangle\langle 1|\right)/\hbar$

$$\langle C\rangle = \langle\Psi(x,t)|C|\Psi(x,t)\rangle = \left(\cos(\delta t/\hbar)\langle 1| - i\sin(\delta t/\hbar)\langle 2|\right)C\left(\cos(\delta t/\hbar)|1\rangle - i\sin(\delta t/\hbar)|2\rangle\right) =$$

$$\cos^2(\delta t/\hbar)\langle 1|C|1\rangle - i\cos(\delta t/\hbar)\sin(\delta t/\hbar)\left(\langle 1|C|2\rangle + \langle 2|C|1\rangle\right) - \sin^2(\delta t/\hbar)\langle 2|C|2\rangle =$$

$$-i\cos(\delta t/\hbar)\sin(\delta t/\hbar)(ib\delta/\hbar)\left(\langle 1||1\rangle\langle 2||2\rangle + \langle 2||2\rangle\langle 1||1\rangle\right) = (b\delta/\hbar)\sin(2\delta t/\hbar).$$

Από τις σχέσεις αυτές επιβεβαιώνεται ότι $d<B>/dt = -<C>$ (ερώτημα (β)).

(ε) Η κυματοσυνάρτηση είναι ίδια με την αρχική, καθώς έχουμε:

$$|\Psi(x,t=h/\delta)\rangle = \cos(2\pi)|1\rangle - i\sin(2\pi)|2\rangle = |1\rangle.$$

Οπότε στις μετρήσεις που σχετίζονται με τους τελεστές A και B και βρίσκουμε τις τιμές a_1 και b αντίστοιχα. Ενώ για την ενέργεια που περιγράφεται από τον τελεστή Η, έχουμε ίσες πιθανότητες (50%) για μέτρηση των ιδιοτιμών $\varepsilon+\delta$ και $\varepsilon-\delta$ αντίστοιχα. Καθώς $|\Psi(x,t=h/\delta)\rangle = |1\rangle = \left(|+\rangle + |-\rangle\right)/\sqrt{2}$ (συντελεστές ιδοκαταστάσεων $|+\rangle, |-\rangle$ είναι $1/\sqrt{2}$).

(στ) Η σχέση ορισμού του τελεστή $\hat{C} = ib\delta\left(|-\rangle\langle +| - |+\rangle\langle -|\right)/\hbar$, δείχνει ότι η αναπαράσταση σε μορφή πίνακα έχει μη διαγώνια στοιχεία φανταστικά. Τα μεγέθη που πρέπει να είναι πραγαματικά είναι οι ιδιοτιμές του τελεστή. Αυτές βρίσκονται από την διαγωνοποίηση του πίνακα

$$\begin{bmatrix} C_{--} & C_{-+} \\ C_{+-} & C_{++} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle -|C|-\rangle & \langle -|C|+\rangle \\ \langle +|C|-\rangle & \langle +|C|+\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ib\delta/\hbar \\ -ib\delta/\hbar & 0 \end{bmatrix},$$

δηλαδή

$\det\begin{bmatrix} -\lambda & ib\delta/\hbar \\ -ib\delta/\hbar & -\lambda \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm b\delta/\hbar$. Οι ιδιοτιμές αυτές είναι πραγματικές και οι ιδιοσυναρτήσεις είναι $\begin{bmatrix} -\lambda_1 & ib\delta/\hbar \\ -ib\delta/\hbar & -\lambda_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} -1 & i \\ -i & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ και $|\lambda_1\rangle = \left(|-\rangle + i|+\rangle\right)/\sqrt{2}$.

Ανάλογα βρίσκουμε $|\lambda_2\rangle = \left(|-\rangle - i|+\rangle\right)/\sqrt{2}$.

ΘΕΜΑ 2[0.5+0.5+0.5+0.5]

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται περιορισμένο σε απείροβαθο πηγάδι δυναμικού. Η αρχική κατάσταση του πηγαδιού πάχους 0,613*nm* περιγράφεται από την κυματοσυνάρτηση:

$$\Psi(x,t=0)=\sin\frac{\pi x}{0,613nm}\left(1+2\cos\frac{\pi x}{0,613nm}\right)/\sqrt{0,613nm}\,.$$

(α) Προσδιορίστε την πιθανότητα να βρίσκεται το ηλεκτρόνιο στην θεμελιώδη κατάσταση.
(β) Για τυχαία χρονική στιγμή ($t > 0$), προσδιορίστε την κατάσταση του κβαντικού συστήματος (δηλαδή γράψτε την $\psi(x,t)$).
(γ) Προσδιορίστε την αβεβαιότητα ενέργειας, σε *eV,* την χρονική στιγμή t=723,453*ps*.
(δ) Προσδιορίστε τον ελάχιστο χρόνο, σε *ps*, για να έχουμε $\Psi(x,t)=\Psi(x,t=0)$.

Λύση

(α) Έχουμε

$$\psi(x)=\sin\frac{\pi x}{L}(1+2\cos\frac{\pi x}{L})/\sqrt{L}=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}2\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi x}{L}=$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{\pi x}{L}+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\frac{2\pi x}{L}=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2$$

Έχουμε τις δύο ενεργειακές καταστάσεις απειρόβαθου πηγαδιού με $c_1=c_2=1/\sqrt{2}$, δηλαδή ισοπίθανες. Οπότε η πιθανότητα να βρίσκεται το ηλεκτρόνιο στην θεμελιώδης κατάσταση είναι 50%.

(β) Προφανώς $\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_1t/\hbar}\psi_1+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_2t/\hbar}\psi_2$.

(γ) $\Delta E^2=\langle E^2\rangle-\langle E\rangle^2=P_1E_1^2+P_2E_2^2-\left(P_1E_1+P_2E_2\right)^2=0.5E_1^2+0.5E_2^2-0.25\left(E_1+E_2\right)^2=0.25\left(E_1-E_2\right)^2$

Καθώς $\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2(nm^2)}\approx\frac{0.3764}{L^2(nm^2)}(eV)$, άρα $E_1=1eV, E_2=4eV$. Οπότε $\Delta E=0.5\left(E_2-E_1\right)=1.5eV$

(δ) Ο ελάχιστος χρόνος, αντιστοιχεί σε χρόνο μιάς περιόδου, δηλαδή
$t=T=2\pi/\omega=2\pi/((E_2-E_1)/\hbar)=h/(E_2-E_1)\sim 1.38ps$.

ΘΕΜΑ 3[0.5+1+1]

Θεωρούμε μονοδιάστατο κβαντικό σύστημα στο οποίο υπάρχει σωμάτιο μάζας *m*. Αν η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι $V(x)=c\delta(x)$.

(α) Ποιος πίνακας είναι σωστός **και γιατί**;

	E > 0	**E < 0**
c > 0	Σ	Α
c < 0	Σ	Δ

	E > 0	**E < 0**
c > 0	Δ	Α
c < 0	Σ	Δ

	E > 0	**E < 0**
c > 0	Σ	Α
c < 0	Α	Δ

Όπου Ε η ολική ενέργεια του συστήματος, και Δ=ΔΕΣΜΙΑ, Σ=κατάσταση ΣΚΕΔΑΣΗΣ και Α=ΑΔΥΝΑΤΗ.
(β) Βρείτε τις ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας σε οποιαδήποτε δέσμια κατάσταση επιθυμείτε.
(γ) Βρείτε τον συντελεστή ανάκλασης σε μία οποιαδήποτε κατάσταση σκέδασης επιθυμείτε.

Λύση

(α) Οι δέσμιες καταστάσεις αντιστοιχούν σε αρνητικές ενέργειες, καθώς σε αυτή την περίπτωση $E<V(\pm\infty)$, όταν c<0. Για θετικές ενέργειες έχουμε καταστάσεις σκέδασης. Η περίπτωση c>0 με αρνητική ενέργεια, αντιστοιχεί σε αρνητική κινητική ενέργεια καθόλη την μονοδιάστατη κίνηση, άρα είναι αδύνατη. Ο πίνακας με τις ορθές πληροφορίες είναι ο πρώτος.

(β), (γ) Βλέπε ασκήσεις και διαγωνίσματα προηγούμενων ετών (ιστοσελίδα μαθήματος) και βιβλίο ασκήσεων Τραχανά.

ΘΕΜΑ 4[1.5+0.5+0.5]

Ένας αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις του.

(α) Προσδιορίστε ακριβώς αυτή την κατάσταση αν γνωρίζουμε ότι $\langle E\rangle = 5/4, \langle p\rangle = 0.$

(β) Υπολογίστε την μέση τιμή της θέσης, από την σχέση $\langle x\rangle = (\Psi(x), x\Psi(x))$.

(γ) Υπολογίστε την μέση τιμή της θέσης, χρησιμοποιώντας τους τελεστές a, a^+.

Υπόδειξη: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(2\alpha)^n}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$, $\Psi_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} e^{-x^2/2}$, $\Psi_1 = \sqrt[4]{\frac{4}{\pi}} x e^{-x^2/2}$.

Λύση

(α) Έχουμε $\langle E\rangle = P_0E_0 + P_1E_1 = (1/2)P_0 + (3/2)P_1 = 5/4$ και καθώς $P_0 + P_1 = 1,$ βρίσκουμε $P_0 = |c_0|^2 = 1/4, P_1 = |c_1|^2 = 3/4.$ Ακόμα γνωρίζουμε ότι $\langle p\rangle = 2|c_0||c_1||p_{01}|\sin\delta$, άρα $\sin\delta = 0 \Rightarrow \delta = 0$, καθώς τα στοιχεία πίνακα είναι μη μηδενικά,

$$p_{01} = p_{10}^* = \left(\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x)(-i\frac{\partial\Psi_0(x)}{\partial x})dx\right)^* = i\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_1(x)\frac{\partial\Psi_0(x)}{\partial x}dx = i\sqrt[4]{\frac{4}{\pi^2}}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-x^2/2}(-xe^{-x^2/2})dx$$

$$= -i\sqrt[4]{\frac{4}{\pi^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx = -i\frac{\sqrt{2}}{2^2} \Rightarrow |p_{01}| = \frac{\sqrt{2}}{2^2}.$$

Έτσι η κυματοσυνάρτηση είναι $\Psi(x) = (1/2)\Psi_0 + (\sqrt{3}/2)\Psi_1$.

(β) Έχουμε $\langle x\rangle = 2|c_0||c_1||x_{01}|\cos\delta$ και καθώς

$$x_{01} = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(x)x\Psi_1(x)dx = \sqrt[4]{\frac{4}{\pi^2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2}x(xe^{-x^2/2})dx$$

$$= \sqrt[4]{\frac{4}{\pi^2}}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2/2}dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow |x_{01}| = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

βρίσκουμε $\langle x\rangle = 2|c_0||c_1||x_{01}|\cos\delta = 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

(γ) Η κυματοσυνάρτηση είναι $|\Psi\rangle = (1/2)|0\rangle + (\sqrt{3}/2)|1\rangle$ (φορμαλισμος Dirac), έτσι

$$\langle x\rangle = \langle\Psi|\frac{a+a^+}{\sqrt{2}}|\Psi\rangle = \left(\frac{1}{2}\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|\right)\left[\frac{a+a^+}{\sqrt{2}}\right]\left(\frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}a^+|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a|1\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}a^+|1\rangle\right) =$$

$$\left(\frac{1}{2}\langle 0| + \frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2}|2\rangle\right) =$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\langle 0|1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle + \frac{1}{4\sqrt{2}}\langle 0|2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\langle 1|1\rangle + \frac{3}{4\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\langle 1|2\rangle =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$