ΚΒΑΝΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗ Ι

Τελική Εξέταση: 22 Γενάρη 2010 (Διδάσκων: Α.Φ. Τερζής)

Διάρκεια εξέτασης ***2,5 ώρες*.**

ΘΕΜΑ 1[0.75+0.75]

(α) Εκατό (100) ηλεκτρόνια σκεδάζονται από αριστερά στα δεξιά σε δυναμικό $V(x)=V_0\Theta(x)\Theta(L-x)$. Αν έχουμε $L=6.14\text{Å}$, $V_0=1eV$ $E=2eV$, πόσα ηλεκτρόνια ανιχνεύονται στο $+\infty$.

(β) Αν το πλάτος τετραγωνικού πηγαδιού είναι 3Å και το βάθος του $20eV$, πόσες δέσμιες ενεργειακές καταστάσεις υπάρχουν σε αυτό για ένα ποζιτρόνιο;

Λύση

(α) $k'=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_0)}=0.5117\ \text{Å}^{-1}$, και $k'L=3.1419\sim\pi\Rightarrow\sin k'L=0$, δηλαδή έχουμε **κατάσταση συντονισμού** και **όλα τα ηλεκτρόνια** ανιχνεύονται στο $+\infty$**.** Αυτό γίνεται φανερό και από το γεγονός ότι η ενέργεια έκαστου ηλεκτρονίου είναι $V_0+\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}=1eV+\frac{37.6922}{6.14^2}eV=1eV+1eV=2eV$.

(β) Η σημαντική παράμετρος είναι η $\lambda=L\sqrt{U_0}=L\sqrt{2mV_0/\hbar^2}$, όπου L είναι το **μισό** πλάτος του πηγαδιού. Έτσι, $\lambda=L\sqrt{U_0}=L\sqrt{2mV_0/\hbar^2}=3,438$ και ο αριθμός των καταστάσεων είναι $Int[2\lambda/\pi]+1$. Καθώς $Int[2\lambda/\pi]+1=3$, δηλαδή οι καταστάσεις στο πηγάδι είναι **τρεις**.

ΘΕΜΑ 2[1+0.5]

Ηλεκτρόνιο βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές του καταστάσεις σε δυναμικό απειρόβαθου πηγαδιού εύρους a. (α) Προσδιορίστε πλήρως αυτή την κατάσταση αν δίνεται ότι έχει μέση θέση $a/2$ και η μέση ορμή του είναι $8\hbar/3a$. (β) Να υπολογιστεί η μέση ενέργεια του συστήματος.

Λύση

Λυμένη άσκηση του 15ου μαθήματος.

(α) $\psi\left(x,t=0\right)=\frac{1}{\sqrt{a}}\sin\frac{\pi x}{a}\left[1-2i\sin\frac{\pi x}{a}\right]$.

(β) $\left\langle E\right\rangle=P_1E_1+P_2E_2=\frac{1}{2}E_0 1^2+\frac{1}{2}E_0 2^2=\frac{5}{2}E_0=\frac{5\pi^2\hbar^2}{4ma^2}$

ΘΕΜΑ 3[0.5+1+0.5+0.5]

Θεωρούμε μονοδιάστατο κβαντικό σύστημα στο οποίο υπάρχει σωμάτιο μάζας *m*. Αν η δυναμική ενέργεια του συστήματος είναι $V(x)=c\delta(x)+c'\delta(x-L)$, με $c,c'\le 0$.

(α) Για ποιες τιμές της ολικής ενέργειας του συστήματος έχουμε δέσμιες καταστάσεις και για ποιες καταστάσεις σκέδασης.

(β) Να βρεθεί η συνθήκη από την οποία εκτιμώνται οι δυνατές ενεργειακές καταστάσεις για την περίπτωση των δέσμιων καταστάσεων.

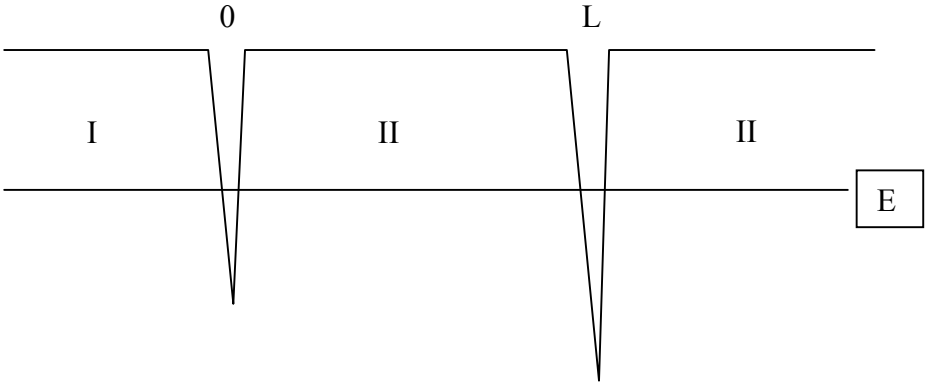
(γ) Να μελετηθεί η ειδική περίπτωση $c'=0$.

(δ) Να μελετηθεί η ειδική περίπτωση $L=0$.

Λύση

(α) Οι δέσμιες καταστάσεις αντιστοιχούν σε αρνητικές ενέργειες, καθώς σε αυτή την περίπτωση $E<V(\pm\infty)$. Για θετικές ενέργειες έχουμε καταστάσεις σκέδασης.

(β)



Οι κυματοσυναρτήσεις στις περιοχές I,II και III, για να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες είναι της μορφής $\Psi_I = Ae^{\gamma x}, \Psi_{II} = B_+ e^{\gamma x} + B_- e^{-\gamma x}, \Psi_{III} = Ce^{-\gamma x},$ όπου $\gamma = \sqrt{-\frac{2mE}{\hbar^2}}$.

Η συνέχεια των κυματοσυναρτήσεων στο x=0 και L δίνει

$$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \Rightarrow A = B_+ + B_- \qquad (1)$$

$$\Psi_{III}(L) = \Psi_{II}(L) \Rightarrow Ce^{-\gamma L} = B_+ e^{\gamma L} + B_- e^{-\gamma L} \qquad (2)$$

Ενώ από την ασυνέχεια των παραγώγων έχουμε

$$\Psi'_{II}(0) - \Psi'_I(0) = \frac{2mc}{\hbar^2}\Psi(0) \Rightarrow \gamma(B_+ - B_-) - \gamma A = \frac{2mc}{\hbar^2}A$$

$$\Rightarrow B_+ - B_- = \left(1 + \frac{2mc}{\gamma\hbar^2}\right)A \Rightarrow B_+ - B_- = wA \qquad (3)$$

$$\Psi'_{III}(L) - \Psi'_{II}(L) = \frac{2mc'}{\hbar^2}\Psi(L) \Rightarrow \gamma(B_+ e^{\gamma L} - B_- e^{-\gamma L}) + \gamma Ce^{-\gamma L} = -\frac{2mc'}{\hbar^2}Ce^{-\gamma L}$$

$$\Rightarrow B_+ e^{\gamma L} - B_- e^{-\gamma L} = -\left(1 + \frac{2mc'}{\gamma\hbar^2}\right)Ce^{-\gamma L} = -w'Ce^{-\gamma L} \qquad (4)$$

Όλες οι σχέσεις μαζί γράφονται ως εξής

$$B_+ + B_- = A \qquad (1)$$

$$B_+ - B_- = wA \qquad (2)$$

$$B_+ e^{\gamma L} + B_- e^{-\gamma L} = Ce^{-\gamma L} \qquad (3)$$

$$B_+ e^{\gamma L} - B_- e^{-\gamma L} = -w'Ce^{-\gamma L} \qquad (4)$$

Μπορούμε να απαλείψουμε τους συντελεστές A και C

$$\frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \frac{B_+ - B_-}{B_+ + B_-} = w \Rightarrow \frac{r-1}{r+1} = w \Rightarrow r\left[\equiv \frac{B_+}{B_-}\right] = \frac{w+1}{1-w}$$

$$\frac{(4)}{(3)} \Rightarrow \frac{B_+ e^{\gamma L} - B_- e^{-\gamma L}}{B_+ e^{\gamma L} + B_- e^{-\gamma L}} = -w' \Rightarrow \frac{re^{\gamma L} - e^{-\gamma L}}{re^{\gamma L} + e^{-\gamma L}} = -w' \Rightarrow r = \left(\frac{1-w'}{1+w'}\right)e^{-2\gamma L}$$

Από την ισότητα των δύο διαφορετικών εκφράσεων για το r, βρίσκουμε

$$\frac{w+1}{1-w} = \left(\frac{1-w'}{1+w'}\right)e^{-2\gamma L} \Rightarrow \frac{2 + \frac{2mc}{\gamma\hbar^2}}{-\frac{2mc}{\gamma\hbar^2}} = \left(\frac{-\frac{2mc'}{\gamma\hbar^2}}{2 + \frac{2mc'}{\gamma\hbar^2}}\right)e^{-2\gamma L} \Rightarrow \frac{1 + \frac{mc}{\gamma\hbar^2}}{\frac{mc}{\gamma\hbar^2}} = \left(\frac{\frac{mc'}{\gamma\hbar^2}}{1 + \frac{mc'}{\gamma\hbar^2}}\right)e^{-2\gamma L}$$

$$\Rightarrow \frac{\left(1 + \frac{mc}{\gamma\hbar^2}\right)\left(1 + \frac{mc'}{\gamma\hbar^2}\right)}{\frac{m^2cc'}{\gamma^2\hbar^4}} = e^{-2\gamma L}$$

(γ) Στην ειδική περίπτωση $c' = 0$, έχουμε

$$\frac{\left(1+\frac{mc}{\gamma\hbar^2}\right)\left(1+\frac{mc'}{\gamma\hbar^2}\right)}{\frac{m^2cc'}{\gamma^2\hbar^4}} = e^{-2\gamma L} \xrightarrow{c'=0} 1+\frac{mc}{\gamma\hbar^2}=0 \Rightarrow \gamma = -\frac{mc}{\hbar^2} \Rightarrow \gamma^2 \left[= -\frac{2mE}{\hbar^2}\right] = \frac{m^2c^2}{\hbar^4} \Rightarrow E = -\frac{mc^2}{2\hbar^2}.$$

Δηλαδή όπως αναμενόταν έχουμε το αποτέλεσμα του δέλτα δυναμικού (μία δέσμια κατάσταση).

(δ) Στην ειδική περίπτωση όπου $L=0$, έχουμε

$$\frac{\left(1+\frac{mc}{\gamma\hbar^2}\right)\left(1+\frac{mc'}{\gamma\hbar^2}\right)}{\frac{m^2cc'}{\gamma^2\hbar^4}} = e^{-2\gamma L} \xrightarrow{L=0} \frac{\left(1+\frac{mc}{\gamma\hbar^2}\right)\left(1+\frac{mc'}{\gamma\hbar^2}\right)}{\frac{m^2cc'}{\gamma^2\hbar^4}} = 1 \Rightarrow \left(1+\frac{mc}{\gamma\hbar^2}\right)\left(1+\frac{mc'}{\gamma\hbar^2}\right) = \frac{m^2cc'}{\gamma^2\hbar^4}$$

$$\Rightarrow 1+\frac{mc}{\gamma\hbar^2}+\frac{mc'}{\gamma\hbar^2}+\frac{m^2cc'}{\gamma^2\hbar^4} = \frac{m^2cc'}{\gamma^2\hbar^4} \Rightarrow 1+\frac{mc}{\gamma\hbar^2}+\frac{mc'}{\gamma\hbar^2}=0 \Rightarrow \frac{m(c+c')}{\gamma\hbar^2} = -1$$

Δηλαδή όπως αναμενόταν έχουμε το αποτέλεσμα ενός δέλτα δυναμικού με ένταση $c+c'$, καθώς $V(x) = c\delta(x) + c'\delta(x-L) \xrightarrow{L=0} V(x) = c\delta(x) + c'\delta(x) = (c+c')\delta(x)$.

ΘΕΜΑ 4[1.25]

(α) Να βρεθούν εκφράσεις για τα $d\langle T\rangle/dt$ και $d\langle V\rangle/dt$ για μονοδιάστατη κίνηση σωματιδίου μάζας m σε δυναμικό $V(x) = ax$.

(β) Να εκτιμηθεί η σχέση αβεβαιότητας των T και V, $\Delta\langle T\rangle\Delta\langle V\rangle$, για $V(x) = b/x$.

Λύση

(α) Ισχύει για οποιοδήποτε τελεστή A, ότι $i\hbar d\langle A\rangle/dt = \langle[A,H]\rangle$. Έτσι έχουμε για την δυναμική ενέργεια $i\hbar d\langle V\rangle/dt = \langle[V,H]\rangle$, Υπολογίζουμε το $[V,H]$,

$$[V,H] = [V,T+V] = [V,T]+[V,V] = [V,T] = \left[V, p^2/2m\right] = (1/2m)\left[V,p^2\right]$$

$$= (1/2m)\{p[V,p]+[V,p]p\} = (1/2m)\{pi\hbar\,\partial V/\partial x + i\hbar\,\partial V/\partial x\, p\} = (i\hbar/2m)\{p\,\partial V/\partial x + \partial V/\partial x\, p\}$$

Οπότε $d\langle V\rangle/dt = \langle(1/2m)\{p\,\partial V/\partial x + \partial V/\partial x\, p\}\rangle = \langle(1/2m)\{pa+ap\}\rangle = a\langle p\rangle/m$.

(β) Ανάλογα καθώς $\Delta A\cdot\Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\langle[A,B]\rangle\right|$, έχουμε

$$\Delta V\cdot\Delta T \geq \frac{1}{2}\left|\langle[V,T]\rangle\right| = (1/4m)\left|\langle\{pi\hbar\,\partial V/\partial x + i\hbar\,\partial V/\partial x\, p\}\rangle\right| = (\hbar/4m)\left|\langle p(-b/x^2)+(-b/x^2)p\rangle\right|$$

$$= (\hbar b/4m)\left|\langle p(1/x^2)+(1/x^2)p\rangle\right|$$

ΘΕΜΑ 5[1.25]

Να μελετηθούν (πλήρη ανάπτυξη) οι καταστάσεις σκέδασης ($E > V_0$) σε δυναμικό $V(x) = V_0\Theta(x)$, όταν η προσπίπτουσα δέσμη έρχεται από το $+\infty$.

Λύση

Ανάλογη διαδικασία όπως στο βιβλίο σας ή στην παράδοση του μαθήματος,

$\Psi_I = Be^{-ikx}, \Psi_{II} = e^{-ik'x} + Ae^{ik'x}$, όπου $k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$ και $k' = \sqrt{\frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}}$.

Από τις συνθήκες συνέχειας έχουμε,

$\Psi_I(0) = \Psi_{II}(0) \Rightarrow B = 1+A$

$\Psi_I'(0) = \Psi_{II}'(0) \Rightarrow -ikB = -ik' + ik'A \Rightarrow (k/k')B = 1-A.$

Οπότε βρίσκουμε $A=(k'-k)/(k'+k)$ και $B=1+(k'-k)/(k'+k)=2k'/(k'+k)$.
Έτσι καθώς $R=|A|^2, T=|B|^2 k/k'$, έχουμε $R=|k-k'|^2/|k+k'|^2, T=2kk'/|k+k'|^2$.

ΘΕΜΑ 6[1+0.5+0.5]

Ένας αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στις δύο πρώτες ενεργειακές καταστάσεις του.
(α) Προσδιορίστε ακριβώς αυτή την κατάσταση αν γνωρίζουμε ότι $\langle E\rangle = 5/4, \langle p\rangle = 0.$
(β) Υπολογίστε την μέση τιμή της θέσης.
(γ) Υπολογίστε την μέση τιμή της θέσης, χρησιμοποιώντας τους τελεστές a, a^+.

Λύση

(α) Έχουμε $\langle E\rangle = P_0E_0 + P_1E_1 = (1/2)P_0 + (3/2)P_1 = 5/4$ και καθώς $P_0+P_1=1,$ βρίσκουμε $P_0=|c_0|^2=1/4, P_1=|c_1|^2=3/4.$ Ακόμα γνωρίζουμε ότι $\langle p\rangle = 2|c_0||c_1||p_{01}|\sin\delta$, άρα $\sin\delta=0\Rightarrow\delta=0$, καθώς τα στοιχεία πίνακα είναι μη μηδενικά,

$$p_{01}=p_{10}^*=\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1(x)(-i\frac{\partial\Psi_0(x)}{\partial x})dx\right)^*=i\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_1(x)\frac{\partial\Psi_0(x)}{\partial x}dx=i\sqrt[4]{\frac{4}{\pi^2}}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-x^2/2}(-xe^{-x^2/2})dx$$

$$=-i\sqrt[4]{\frac{4}{\pi^2}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2/2}dx=-i\frac{\sqrt{2}}{2^2}\Rightarrow|p_{01}|=\frac{\sqrt{2}}{2^2}.$$

Έτσι η κυματοσυνάρτηση είναι $\Psi(x)=(1/2)\Psi_0+(\sqrt{3}/2)\Psi_1$.
(β) Έχουμε $\langle x\rangle = 2|c_0||c_1||x_{01}|\cos\delta$ και καθώς

$$x_{01}=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi_0(x)x\Psi_1(x)dx=\sqrt[4]{\frac{4}{\pi^2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2/2}x(xe^{-x^2/2})dx$$

$$=\sqrt[4]{\frac{4}{\pi^2}}\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-x^2/2}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow|x_{01}|=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

βρίσκουμε $\langle x\rangle = 2|c_0||c_1||x_{01}|\cos\delta = 2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$

(γ) Η κυματοσυνάρτηση είναι $|\Psi\rangle=(1/2)|0\rangle+(\sqrt{3}/2)|1\rangle$ (φορμαλισμος Dirac), έτσι

$$\langle x\rangle=\langle\Psi|\frac{a+a^+}{\sqrt{2}}|\Psi\rangle=\left(\frac{1}{2}\langle 0|+\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|\right)\left[\frac{a+a^+}{\sqrt{2}}\right]\left(\frac{1}{2}|0\rangle+\frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle\right)=$$

$$\left(\frac{1}{2}\langle 0|+\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}a^+|0\rangle+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a|1\rangle+\frac{1}{2\sqrt{2}}a^+|1\rangle\right)=$$

$$\left(\frac{1}{2}\langle 0|+\frac{\sqrt{3}}{2}\langle 1|\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}|1\rangle+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|0\rangle+\frac{1}{2\sqrt{2}}\sqrt{2}|2\rangle\right)=$$

$$\frac{1}{4\sqrt{2}}\langle 0|1\rangle+\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle+\frac{1}{4\sqrt{2}}\langle 0|2\rangle+\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\langle 1|1\rangle+\frac{3}{4\sqrt{2}}\langle 1|0\rangle+\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\langle 1|2\rangle=$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$$

Καλή επιτυχία