ΤΕΣΤ 9 | «Κβάντο Ι», περίοδοι 7/1/21 (13:00). Α.Φ. Τεστ

Θ1. «Κατασκευάστε» κβαντική τετοία, διαστάσεων (L_x, L_y, L_z), στην οποία η θεμελιώδης κατάσταση ενός ελεύθερου e, είναι ίση με την ενέργεια ιονισμού του ατόμου του υδρογόνου. Για την "ευκολία" μας θεωρούμε $L_x = L_y = L_z = L$, οπότε στην θεμελιώδη κατάσταση $n_x = n_y = n_z = 1 \rightarrow E = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL^2} 3 = 13{,}6\,eV$. Από το Θ2 στο τεστ 2 έχουμε $\frac{\hbar^2 \pi^2}{2mL_0^2} = \frac{1}{3} eV$ και $L_0 = 1\mu m$, άρα $L^2 = \frac{1}{13{,}6}\mu m^2 \rightarrow L \sim 0{,}27\,\mu m$. Πειραματικά οι πιο μικρές κβαντικές τετοίες είναι κάτω στο $1\mu m$. Βέβαια μαν είμαστε ακόμη πρέπει να χρησιμοποιούμε ενεργό μάζα $m_e^* \sim 0{,}06\, m_e$.

Θ2. Να λυθεί το πρόβλημα ιδιοτιμών της ενέργειας για δυναμικό $V(x,y) = k(x-y)^2$.
Είναι ουσιαστικά η άσκηση Β (σελίδα 2, 3ο μάθημα ΚΒΑΝΤΟ ΙΙ, τετράδιο μαθήματος). Τώρα $V(x,y) = k(x-y)^2 = 2kw^2$, οπότε η συνέχεια όπως εκεί με "αλλαγή" στου c^{te} των u & w.

Θ3. Να «δημιουργήσετε» Φ.Σ.Μ. για (α) τετραγωνικά πηγάδι δυναμικού $[L, V_0]$, και (β) για μονοδιάστατο δυναμικό Coulomb, $V(x) = -e^2/|x|$ (σε c.g.s. σύστημα μονάδων).

(α) $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + V_0\psi = E\psi$, διαιρώ με E_0 όπου χρειάζεται!

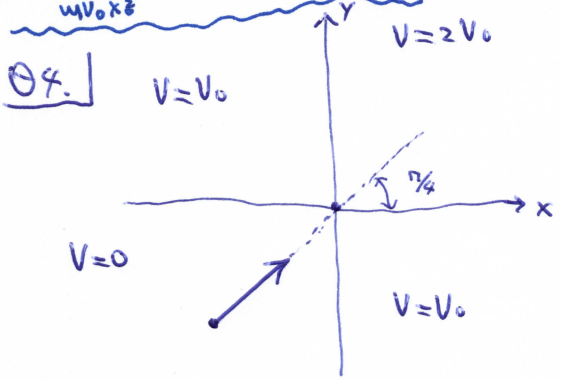
$-\frac{\hbar^2}{2mE_0x_0^2}\frac{d^2\psi}{d(x/x_0)^2} + \frac{V_0}{E_0}\psi = \frac{E}{E_0}$ (1 και 1)

Άρα $E_0 = V_0$ και $\frac{\hbar^2}{mV_0x_0^2} = 1 \rightarrow x_0 = \hbar/\sqrt{mV_0}$

(β) $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - \frac{e^2}{|x|}\psi = E\psi \rightarrow -\frac{1}{2}\frac{\hbar^2}{mE_0x_0^2}\frac{d\psi^2}{d(x/x_0)^2} - \frac{e^2}{E_0x_0}\frac{\psi}{|x/x_0|} = \frac{E}{E_0}\psi$ (1 και 1)

Έχουμε $\frac{\hbar^2}{mE_0x_0^2} = 1$ & $\frac{e^2}{E_0x_0} = 1$, οπότε, διαιρώ τις δύο σχέσεις και βρίσκω $x_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ (ακτίνα Bohr) και $E_0 = \frac{me^4}{\hbar^2}$, που είναι συνωστή και ως ενέργεια Rydberg.

Θ4.



Για προσπίπτον e όπως στο σχήμα να βρεθεί η πιθανότητα να $\mu\omega$ έχουμε αλλαγή κατεύθυνσης της κίνησης μετά την σκέδαση.

$$V(x,y) = V^{(x)}(x) + V^{(y)}(y) = V_0\,\theta(x) + V_0\,\theta(y)$$

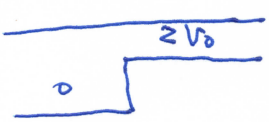
Οπότε μπορεί να διαχωριστεί η μεθοδολογία που έχουμε αναπτύξει στα μαθήματα.

Η συνολική λύση είναι υπέρθεση καταστάσεων χωρισμένου $X(x)\,Y(y)$.

Το προσπίπτον είναι $e^{i(k_x x + k_y y)}$ με $E = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2)$

από την γεωμετρεία του σχήματος έχουμε $k_x = k\cos\pi/4 = \frac{k}{\sqrt{2}}$ & $k_y = k\sin\frac{\pi}{4} = \frac{k}{\sqrt{2}}$

και $E = \frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{k^2}{2} + \frac{k^2}{2}\right) = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.



Ουσιαστικά έχουμε μια μονοδιάστατη σκέδαση με $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ και $E' = \frac{\hbar^2 k'^2}{2m} = E - 2V_0 = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} - 2V_0$.

Άρα το ζητούμενο είναι $T = \frac{kk'}{(k+k')^2}$.