8ο ΤΕΣΤ «εκβάτεο Ι», 19/12/20. Α. Φ. Τεφ Ι 9Τ

Θ1 (10) Για κ.Α.Τ. γνωρίζουμε ότι $|\Psi(x,t=0)\rangle = |c_0|e^{i\phi_{01}}|0\rangle + |c_1||1\rangle$ & $\langle E\rangle = 1$ & $\langle x\rangle(t=0) = 1/\sqrt{2}$. Να βρεθούν (α) $|\Psi(x,t)\rangle$, (β) το $\langle x\rangle(t)$ χρησιμοποιώντας την σχέση $\langle x\rangle(t) = |c_0|^2 x_{00} + |c_1|^2 x_{11} + 2|c_0||c_1|x_{10}\cos(\omega t + \phi_{01} + \delta^x_{10})$

Τα x_{00}, x_{11} & x_{10} να υπολογιστούν με δύο τρόπους (όπως στην παράδοση του μαθήματος) Α. με τα ολοκληρώματα, π.χ. $x_{00} = \int \psi_0 x \psi_0 dx$ & Β. με την αλγεβρική μέθοδο, π.χ. $x_{00} = \langle 0|\hat{x}|0\rangle = \langle 0|\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}|0\rangle$.

Επίσης να βρεθούν το (γ) $\langle p\rangle(t)$. (δ) Να εξεταστεί αν ισχύουν τα δύο 'θεωρήματα' του Ehrenfest.

(3) [άσκηση bonus]
Θ2. Να βρεθεί ένα φυσικό σύστημα μονάδων για δυναμική $V(x) = -g\delta(x)$.

Απαντήσεις, Θ1 'Πρακτικά' η άσκηση 31.2 του 31ου μαθήματος (πέμπτη 17/12/2020).

$\langle E\rangle = |c_0|^2 E_0 + |c_1|^2 E_1 = \frac{1}{2}|c_0|^2 + \frac{3}{2}|c_1|^2 = 1 \to 3|c_1|^2 + |c_0|^2 = 2$, ενώ ισχύει $|c_0|^2 + |c_1|^2 = 1$ (ΦΣΜ)

αφαιρώντας βρίσκουμε $2|c_1|^2 = 1 \to |c_1| = 1/\sqrt{2}$ άρα και $|c_0| = 1/\sqrt{2}$. $\xrightarrow{\omega = E_1 - E_0 = 1,\ t_1 = 1}$ $|x_{10}|\cos(t + \phi_{01} + \delta^x_{10}) = \cdots$

Έχουμε επίσης $\langle x\rangle(t) = |c_0|^2 x_{00} + |c_1|^2 x_{11} + 2|c_0||c_1||x_{10}|\cos(\omega t + \phi_{01} + \delta^x_{10})$ όπου για τον τελευταίο σχέση χρησιμοποιήσαμε την πληροφορία $x_{00} = x_{11} = 0$.

Απόδειξη Α-μέθοδος $x_{00} = \langle\psi_0|\hat{x}|\psi_0\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2} x \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x^2/2} dx = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx = 0$ (περιττή συμμετρία) & $x_{11} = \cdots = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int x^3 e^{-x^2} dx = 0$

Β' μέθοδος, $x_{00} = \langle 0|\hat{x}|0\rangle = \langle 0|\frac{\hat{a}^\dagger + \hat{a}}{\sqrt{2}}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|(\hat{a}^\dagger|0\rangle + \hat{a}|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\psi(|1\rangle + 0) = \frac{\langle 0|1\rangle}{\sqrt{2}} = 0$, αναλόγως $\langle 11|\hat{x}|11\rangle = 0$.

Τώρα υπολογίζουμε το x_{10}. $x_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1 \hat{x}\psi_0 dx = \int \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} x e^{-x^2/2} \times \frac{1}{\pi^{1/4}} e^{-x^2/2} dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

ή αλλιώς $x_{10} = \langle 11|\hat{x}|10\rangle = \langle 11|\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 11|(\hat{a}|10\rangle + \hat{a}^\dagger|10\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle 11|(0 + |11\rangle) = \frac{\langle 111\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Έτσι $|x_{10}| = 1/\sqrt{2}$ και $\delta^x_{10} = 0$. Οπότε $\langle x\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t + \phi_{01})$. Δίνεται $\langle x\rangle(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\phi_{01} \to \phi_{01} = 0$

Άρα $|\Psi(x,t)\rangle = \frac{e^{i0}|0\rangle e^{-it/2} + |1\rangle e^{-i3t/2}}{\sqrt{2}} = \frac{e^{-it/2}|0\rangle + e^{-3it/2}|1\rangle}{\sqrt{2}}$ (α).

και (β) $\langle x\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t + 0) = \cos t/\sqrt{2}$.

(γ) $\langle p\rangle(t) = |c_0|^2 p_{00} + |c_1|^2 p_{11} + 2|c_0||c_1||p_{10}|\cos(t + \phi_{01} + \delta^p_{10}) = |p_{10}|\cos(t + 0 + \delta^p_{10})$. Όπου $p_{00} = \int \psi_0 \hat{p}\psi_0 dx = 0$ (έχει χύσει ο υπολογισμός "λόγω φύσεως συνάρτησης") αναλόγως $p_{11} = 0$ ενώ $p_{10} = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1 \hat{p}\psi_0 dx = \int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} x e^{-x^2/2}\left(-i\frac{d}{dx}\frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-x^2/2}\right)dx = \frac{\sqrt{2}i}{\sqrt{\pi}}\int x^2 e^{-x^2} dx = \frac{i}{\sqrt{2}}$, άρα $|p_{10}| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\delta^p_{10} = \frac{\pi}{2}$

Οπότε $\langle p\rangle(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(t + 0 + \frac{\pi}{2}) = -\sin t/\sqrt{2}$. Ενδιαμεσικά (Β' μέθοδος) $p_{00} = \langle 0|\hat{p}|0\rangle = \langle 0|\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}i}|0\rangle = \cdots = 0$

& $p_{11} = \langle 1|\hat{p}|1\rangle = 0$. Ενώ $p_{10} = \langle 11|\hat{p}|0\rangle = \langle 11|\frac{\hat{a}-\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}i}|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}i}\langle 11|(\hat{a}|0\rangle - \hat{a}|0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}i}\langle 11|(0 - |11\rangle) = \frac{-\langle 111\rangle}{\sqrt{2}i} = \frac{i}{\sqrt{2}}$.

(δ) $d\langle x\rangle(t)/dt = -\sin t/\sqrt{2} = \langle p\rangle(t)$ (ΦΣΜ, $m = 1$) & $d\langle p\rangle(t)/dt = -\cos t/\sqrt{2} = -\langle x\rangle$ (νόμος Hooke)

Βέβαια η πιο πλήρης απόδειξη, αναλυτική να γίνουμε από το Φ.Σ.Μ. Οπότε $\langle x\rangle(t) = -x_0\sin(\omega t)/\sqrt{2}$ και $\frac{d\langle x\rangle(t)}{dt} = -\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\cos(\omega t)/\sqrt{2} = -\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\,\omega\sin(\omega t)/\sqrt{2} = m\left(-\sqrt{\hbar m\omega}\sin(\omega t)/\sqrt{2}\right)$ (όταν γύρω από ΦΣΜ) $= \langle p\rangle(t)$

Επίσης $\frac{d\langle p\rangle(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\sqrt{\hbar m\omega}\sin(\omega t)/\sqrt{2}\right) = -\sqrt{\hbar m\omega}\,\omega\frac{\cos(\omega t)}{\sqrt{2}} = -m\omega^2\sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}\frac{\cos(\omega t)}{\sqrt{2}} = -m\omega^2\left(x_0\frac{\cos(\omega t)}{\sqrt{2}}\right) = -m\omega^2\langle x\rangle$ (νόμος Hooke)

σημ-δύ $\langle p\rangle(t) = p_0(-\sin(\omega t)/\sqrt{2})$, $p_0 = \sqrt{\hbar m\omega}$

$\left\langle -\frac{\partial V}{\partial x}\right\rangle = \left\langle -\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{2}m\omega^2 x^2\right\rangle = -m\omega^2\langle x\rangle$.

Θ2. Εξίσωση Schrödinger $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} - g\delta(x)\psi = E\psi$.

Ακολουθώ την ακόλουθη διαδικασία (βλέπε μάθημα 29, τρίτη 15/12/20). Διαιρώ παντού με E_0. Μετατρέπω το διαφορικό d^2x σε $d^2\left(\frac{x}{x_0}\right)$ οπότε πολλαπλασιάζω (για να μην 'χάσω' εν εξίσωση) με x_0^2 το σημ. Τέλος αφού το $\delta(x)$ έχει διαστάσεις αντίστροφου μήκους (καθώς $\int\delta(x)dx = 1$, αφού το x έχει διαστάσεις μήκους το $\delta(x)$ αντίστροφο μήκους κλπ βλ. βιβλίο) πολλαπλασιάζω και διαιρώ με το x_0, οπότε τώρα η $\delta(x)$ γίνεται μια αδιάστατη $\tilde{\delta}(\tilde{x}) = x_0\delta(x)$. (αφού $\int\tilde{\delta}(\tilde{x})d\tilde{x} = 1$)

Έτσι η εξίσωση γίνεται $-\frac{\hbar^2}{2mE_0x_0^2}\frac{d^2\psi(\tilde{x})}{d\tilde{x}^2} - \frac{g}{E_0x_0}\left(x_0\delta(\tilde{x})\right)\psi(\tilde{x}) = \tilde{E}\psi(\tilde{x})$, όπου $\tilde{x} = x/x_0$ & $\tilde{E} = E/E_0$.

Θέτω $\frac{\hbar^2}{mE_0x_0^2} = 1$ & $\frac{g}{E_0x_0} = 1 \to E_0 = \frac{mg^2}{\hbar^2}$ & $x_0 = \frac{\hbar^2}{mg}$ & η εξίσωση είναι στο Φ.Σ.Μ $-\frac{1}{2}\psi'' - \delta(\tilde{x})\psi = E\psi$