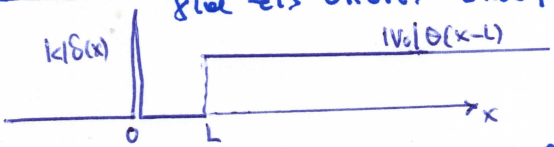
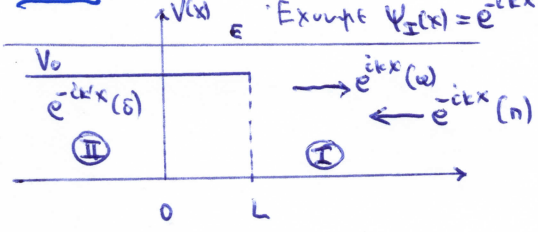
Τεστ 7. <<Κβαντο Ι>>, 10/12/20. α. φ. τεργιού

Θ1. [Σ1] Για το δυναμικό $V(x) = |\alpha|\delta(x) + |V_0|\Theta(x-L)$, εξηγείστε αν υπάρχουν E για τις οποίες έχουμε δέσμιες καταστάσεις.



$V_{min}=0$, $V(-\infty)=0$, $V(+\infty)=|V_0|$, άρα δεν υπάρχουν δέσμιες καταστάσεις γιατί η συνθήκη $V_{min} < E < V(\pm\infty)$ δεν επαληθεύεται ποτέ.

Θ2. [Σ] Για δυναμικό $V(x) = V_0\Theta(L-x)$, με $V_0>0$, να βρεθεί το R, για σκέδαση $E \to (\infty \to -\infty)$ & $E \gg V_0$.



Έχουμε $\psi_I(x) = e^{-ikx} + Ae^{ikx}$ & $\psi_{II}(x) = Be^{-ik'x}$, όπου $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ & $k'^2 = \frac{2m(E-V_0)}{\hbar^2}$

Σ.Σ. $x=L$ $\quad \psi_I(L) = \psi_{II}(L) \to Be^{-ik'L} = e^{-ikL} + Ae^{ikL}$ ①

& $\quad \psi'_I(L) = \psi'_{II}(L) \to -ik'Be^{-ik'L} = ik(-e^{-ikL} + Ae^{ikL})$ ②

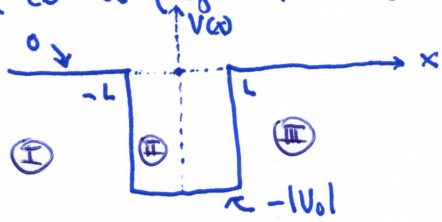
Διαιρούμε ②/① ⟶ $A = e^{-2ikL}\left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)$

$\to R = |A|^2 = e^{+2ikL}\left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)e^{-2ikL}\left(\frac{k-k'}{k+k'}\right) = \left(\frac{k-k'}{k+k'}\right)^2$.

$\Theta(L-x) = \begin{cases} 0 & L-x<0 \to x>L \\ 1 & L-x>0 \to x<L \end{cases}$

Θ3. [1+2+2=5]

Για το τετραγωνικό πηγάδι δυναμικού (σχήμα) να βρεθούν (α) οι άρτιες κυματοσυναρτήσεις. (β) Να γράψετε τις συνοριακές συνθήκες και από αυτές να βρείτε την "γραφική επίλυση". Όταν το $L \to 0$ & το $|V_0| \to +\infty$ με τρόπο έτσι ώστε $2L\cdot V_0 = \gamma$, αυτό που παίρνουμε είναι ένα δέλτα πηγάδι δυναμικού. (γ) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές της ενέργειας του χρησιμοποιώντας την απάντηση του (β) ερωτήματος.



(α) $\psi_I = A_+e^{\gamma x} + A_-e^{-\gamma x}$, $\psi_{II} = B_c\cos kx$ ή $B_s\sin kx$, $\psi_{III} = C_-e^{-\gamma x} + C_+e^{\gamma x}$

Θέλω $\psi(x\to+\infty)=0$, άρα $A_- = C_+ = 0$. Για άρτιες λύσεις έχω προφανώς $\psi_{II} = B_c\cos kx$.

και αφού επιλέον $\psi_I(x) = \psi_{III}(-x)$ (άρτια λύση) $\to A_+e^{\gamma x} = C_-e^{\gamma(-x)} = C_-e^{\gamma x} \to A_+ = C_-$.

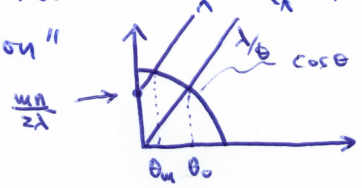
(β) Σ.Σ. $x=L$ $\quad B_c\cos kL = A_+e^{-\gamma L}$ & $-kB_c\sin kL = -\gamma A_+e^{-\gamma L}$. Διαιρούμε την 2η με την πρώτη οπότε και βρίσκουμε $\tan kL = \frac{\gamma}{k}$. Καθώς $k^2 = \frac{2m(E+V_0)}{\hbar^2}$ & $\gamma^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2}$

$\gamma^2 + k^2 = \frac{2mV_0}{\hbar^2} = V_0$. Όπότε μπορώ να έχω $\gamma = \sqrt{V_0}\sin\theta$ και $k = \sqrt{V_0}\cos\theta$, με $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

έτσι $\tan kL = \tan\theta \to kL = \theta + n\pi$ $(n = 0, 1, 2, \dots) \to \sqrt{V_0}L\cos\theta = \theta + n\pi \to \cos\theta = \frac{1}{\lambda}\theta + \frac{n\pi}{\lambda}$

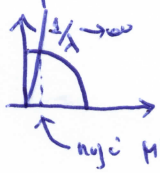
με $\lambda = L\sqrt{V_0}$ και $\cos\theta = \frac{\theta}{\lambda} + \frac{m\pi}{2\lambda}$ (με $m = 0, 2, 4 \cdots$ άρτιες).

"Γραφική επίλυση"



(γ) $L\to 0$, $V_0 \to \infty$ με $2LV_0 = \gamma$. $\quad \lambda = \sqrt{V_0}L = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\sqrt{V_0}L = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}}\sqrt{V_0 2L}\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{L} = \sqrt{\frac{m\gamma}{\hbar^2}}\sqrt{2}\sqrt{L} \to 0$ (αφού $L\to 0$)

οπότε $\frac{1}{\lambda} \to \infty$



Άρα $\cos\theta \sim 1$ και για $\eta = 0$ (θεμελιώδη)

$1 = \theta/\lambda \to \theta = \lambda$

Άρα $\gamma^2 = -\frac{2mE}{\hbar^2} = (\sqrt{V_0}\sin\theta)^2 = V_0\sin^2\theta \sim V_0\theta^2$

Δηλαδή $E = -\frac{\hbar^2}{2m}V_0\theta^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}V_0V_0L^2 = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{2mV_0}{\hbar^2}\right)^2L^2 = \frac{-m(2V_0L)^2}{2\hbar^2} = \frac{-m\gamma^2}{2\hbar^2}$.