6ο ΤΕΣΤ, 26/11/20, <<κβάντο Ι>>, Α.Φ. Τερζής

**Θ1.** Για τον τελεστή $\hat{W}$, έχουμε την εξής πληροφορία, $\hat{W}\Phi_1 = |w|\Phi_1$, $\hat{W}\Phi_2 = -|w|\Phi_2$

Γνωρίζουμε επίσης ότι $\hat{H}\Phi_1 = \hat{H}\Phi_2 = \varepsilon(\Phi_1+\Phi_2)$.

(α) Να βρεθούν τα στοιχεία του πίνακα $H_{ij} = (\Phi_i, \hat{H}\Phi_j)$

(β) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές & (γ) οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας.

(δ) Να βρείτε την αναπαράσταση υπό μορφή πίνακα του $\hat{W}$ χρησιμοποιώντας τις ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας.

Την χρονική στιγμή $t=0$, μετρώ το φυσικό μέγεθος που σχετίζεται με τον τελεστή $\hat{W}$ και βρίσκω θετική τιμή.

(ε) Να βρεθεί η $\Psi(x,t)$. Επίσης να βρεθούν (στ) η μέση ενέργεια και (ζ) το $\langle\hat{W}\rangle(t)$. (η) Πολά η πιθανότητα να μετρήσω αρνητική τιμή του μεγέθους που περιγράφει ο $\hat{W}$? (θ) Να υπολογιστεί η ποσότητα $\frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{W},\hat{H}]\rangle$. (ι) Τέλος υποδείχτηκε ότι ο τελεστής $\hat{\Theta} = |\theta|\left[|1\rangle\langle 1| + |2\rangle\langle 2| + |1\rangle\langle 2| + |2\rangle\langle 1|\right]$ μπορεί να μετρηθεί ταυτόχρονα με την ενέργεια. $|1\rangle$ & $|2\rangle$ είναι οι ιδιοκαταστάσεις $\Phi_1$ & $\Phi_2$, γραμμένες στον φορμαλισμό Dirac. $\begin{bmatrix}\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon\end{bmatrix}$

(α) $H_{11} = (\Phi_1, \hat{H}\Phi_1) = (\Phi_1, \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon\Phi_2) = \varepsilon$ ανάλογα όλα τα $H_{ij} = \varepsilon$.

(β) $\det\begin{bmatrix}\varepsilon-\lambda & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon-\lambda\end{bmatrix} = 0 \to (\varepsilon-\lambda)^2 - \varepsilon^2 = 0 \to \varepsilon^2 - 2\varepsilon\lambda + \lambda^2 - \varepsilon^2 = 0 \to \lambda(\lambda-2\varepsilon) = 0 \to$ $\boxed{\lambda=0}$, $\boxed{\lambda=2\varepsilon}$ ιδιοτιμές ενέργειας

(γ) $\lambda=0$: $\begin{bmatrix}\varepsilon-0 & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon-0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ y_0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \to \varepsilon x_0 + \varepsilon y_0 = 0 \to y_0 = -x_0$ & $|x_0|^2 + |y_0|^2 = 1 \to 2|x_0|^2 = 1 \to |x_0|^2 = \frac{1}{2}$

διαλέγουμε $x_0 = |x_0| = 1/\sqrt{2}$ οπότε $y_0 = -1/\sqrt{2}$

& $\boxed{\Psi_0 = (\Phi_1 - \Phi_2)/\sqrt{2}}$

$\lambda = 2\varepsilon$: $\begin{bmatrix}\varepsilon-2\varepsilon & \varepsilon\\ \varepsilon & \varepsilon-2\varepsilon\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{2\varepsilon}\\ y_{2\varepsilon}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \to -\varepsilon x_{2\varepsilon} + \varepsilon y_{2\varepsilon} = 0 \to y_{2\varepsilon} = x_{2\varepsilon}$ & $|x_{2\varepsilon}|^2 + |y_{2\varepsilon}|^2 = 1$

... οπότε $x_{2\varepsilon} = y_{2\varepsilon} = 1/\sqrt{2}$

άρα $\boxed{\Psi_{2\varepsilon} = (\Phi_1 + \Phi_2)/\sqrt{2}}$

(δ) $W_{00} = (\Psi_0, \hat{W}\Psi_0) = \left(\Psi_0, \frac{\hat{W}\Phi_1 - \hat{W}\Phi_2}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{\Phi_1-\Phi_2}{\sqrt{2}}, \frac{|w|\Phi_1 - (-|w|\Phi_2)}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left([\Phi_1-\Phi_2], [|w|\Phi_1 + |w|\Phi_2]\right) = \frac{|w|-|w|}{2} = 0$

ανάλογα $W_{2\varepsilon 2\varepsilon} = (\Psi_{2\varepsilon}, \hat{W}\Psi_{2\varepsilon}) = \ldots = \ldots = 0$. Επίσης $W_{02\varepsilon} = (\Psi_0, \hat{W}\Psi_{2\varepsilon}) = \left(\frac{\Phi_1-\Phi_2}{\sqrt{2}}, \frac{\hat{W}\Phi_1 + \hat{W}\Phi_2}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(\Phi_1-\Phi_2\right)\left[|w|\Phi_1 - |w|\Phi_2\right]$

$= \frac{1}{2}|w| + \frac{1}{2}|w| = |w|$ και ανάλογα ή και αφού $W_{2\varepsilon 0} = (W_{02\varepsilon})^* = |w|$.

$\begin{bmatrix}0 & |w|\\ |w| & 0\end{bmatrix}$

(ε) Βρίσκω $|w|$ (θετική), άρα $\Psi(x,t=0) = \Phi_1$,

οπότε $\Psi(x,t) = c_0 e^{-i\varepsilon 0/\hbar}\Psi_0 + c_{2\varepsilon} e^{-i2\varepsilon\varepsilon/\hbar}\Psi_{2\varepsilon}$ με $c_0 = (\Psi_0, \Psi(x,0)) = (\Psi_0, \Phi_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$

& $c_{2\varepsilon} = (\Psi_{2\varepsilon}, \Psi(x,0)) = \left(\frac{\Phi_1+\Phi_2}{\sqrt{2}}, \Phi_1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Άρα $\boxed{\Psi(x,t) = \left(\Psi_0 + \Psi_{2\varepsilon}e^{-i2\varepsilon\varepsilon/\hbar}\right)/\sqrt{2}}$

$|c_0|^2 = |c_1|^2 = \frac{1}{2}$, $|W_{2\varepsilon 0}| = |w|$, $\delta^W_{2\varepsilon 0} = 0$, $\Phi_{0 2\varepsilon} = 0$ & $\omega = \frac{2\varepsilon - 0}{\hbar} = 2\varepsilon/\hbar$

(στ) $\boxed{\langle E\rangle = |c_0|^2\cdot 0 + |c_{2\varepsilon}|^2\cdot 2\varepsilon = \frac{1}{2}\cdot 2\varepsilon = \varepsilon}$

(ζ) $\boxed{\langle W\rangle(t) = |c_0|^2 W_{00} + |c_{2\varepsilon}|^2 W_{2\varepsilon 2\varepsilon} + 2|c_0||c_{2\varepsilon}||W_{2\varepsilon 0}|\cos(\omega t + \Phi_{0 2\varepsilon} + \delta^W_{2\varepsilon 0})}$

$= \frac{1}{2}0 + \frac{1}{2}0 + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|w|\cos\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right) = \boxed{|w|\cos\left(2\varepsilon t/\hbar\right)}$

Η $\Psi(x,t) = \frac{\Psi_0 + \Psi_{2\varepsilon}e^{-i2\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}} = e^{-i\varepsilon t/\hbar}\left[\frac{\Psi_0 e^{i\varepsilon t/\hbar} + \Psi_{2\varepsilon}e^{-i\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}}\right]$ είναι παρόμοια "ισοδύναμη" με την $\tilde{\Psi}(x,t)$.

& $\tilde{\Psi}(x,t) = \frac{\Phi_1-\Phi_2}{\sqrt{2}}\frac{e^{i2\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}} + \frac{\Phi_1+\Phi_2}{\sqrt{2}}\frac{e^{-i2\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}} = \Phi_1\cdot\frac{e^{i2\varepsilon t/\hbar} + e^{-i2\varepsilon t/\hbar}}{2} + i\Phi_2\frac{e^{i2\varepsilon t/\hbar} - e^{-i2\varepsilon t/\hbar}}{2i} = \Phi_1\cos\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right) - i\Phi_2\sin\left(\frac{2\varepsilon t}{\hbar}\right)$

Δηλαδή $\Psi(x,t) \sim \underbrace{\cos(2\varepsilon t/\hbar)\Phi_1 + (-i\sin(2\varepsilon t/\hbar))\Phi_2}_{\text{είναι ισοδύναμη}} = c_1(t)\Phi_1 + c_2(t)\Phi_2$

(η) Άρα η πιθανότητα να μετρήσω αρνητική τιμή είναι $|c_2(t)|^2 = |-i\sin(2\varepsilon t/\hbar)| = \sin^2(2\varepsilon t/\hbar)$

Φυσικά τα "ίδια" αποτελέσματα θα είχαμε, χρησιμοποιώντας την $\Psi(x,t)$ κανονικά! Θα ήταν πιο 'πολύπλοκα'!

Πράγματι $\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\Phi_1-\Phi_2}{\sqrt{2}} + \frac{e^{-i2\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}}\frac{\Phi_1+\Phi_2}{\sqrt{2}} = \underbrace{\frac{\left(1+e^{-i2\varepsilon t/\hbar}\right)}{2}}_{c_1(t)}\Phi_1 + \underbrace{\frac{\left(e^{-i2\varepsilon t/\hbar}-1\right)}{2}}_{c_2(t)}\Phi_2$

∾

Η ζητούμενη πιθανότητα, δηλαδή το $|c_2(t)|^2 = c_2(t)c_2^*(t) = \frac{1}{4}(e^{-i\varepsilon t/\hbar}-1)(e^{+i\varepsilon t/\hbar}-1) =$

$= \frac{1+e^{i2\varepsilon t/\hbar} - e^{-i2\varepsilon t/\hbar} + 1}{4} = \frac{2-2\cos 2\varepsilon t/\hbar}{4} = \frac{1-(\cos^2 \varepsilon t/\hbar - \sin^2 \varepsilon t/\hbar)}{2} = \frac{2\sin^2(\varepsilon t/\hbar)}{2} = \sin^2(\varepsilon t/\hbar)$, όπως πριν.

(θ) Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την σχέση $\frac{d\langle\hat{\omega}\rangle(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{\omega},\hat{H}]\rangle$ και να υπολογίσουμε πρώτα το $d\langle\omega\rangle/dt = \frac{d}{dt}(|\omega|\cos(2\varepsilon t/\hbar)) = -\frac{2\varepsilon|\omega|}{\hbar}\sin(2\varepsilon t/\hbar)$

(ι) Χρησιμοποιώντας ο $\hat{\Theta}$ είναι $\begin{bmatrix} |\theta| & |\theta| \\ |\theta| & |\theta| \end{bmatrix}$ ίδιας μορφής με του $H = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$ άρα η διαγωνιοποίησή του θα δώσει (άλλες ιδιοτιμές) αλλά ίδιες ιδιοσυναρτήσεις. Δύο τελεστές με κοινές ιδιοσυναρτήσεις παριστάνουν φυσικά μεγέθη που μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα.

Στην συνέχεια λύνουμε την ίδια άσκηση με το φορμαλισμό Dirac.

Εκφώνηση Dirac, $\hat{\omega}|1\rangle = |\omega||1\rangle$ & $\hat{\omega}|2\rangle = -|\omega||2\rangle$ & $\hat{H}|1\rangle = \hat{H}|2\rangle = \varepsilon(|1\rangle+|2\rangle)$.

$H_{ij} = \langle i|\hat{H}|j\rangle$, π.χ. $H_{12} = \langle 1|\hat{H}|2\rangle = \langle 1|(\varepsilon|1\rangle + \varepsilon|2\rangle) = \varepsilon\underbrace{\langle 1|1\rangle}_{1} + \varepsilon\underbrace{\langle 1|2\rangle}_{0} = \varepsilon$.

Η μεθοδολογία της διαγωνιοποίησης είναι ακριβώς η ίδια, αλλάζουν οι τελικοί χαρακτήρες των ιδιοκαταστάσεων. Τώρα έχουμε $|0\rangle = (|1\rangle - |2\rangle)/\sqrt{2}$ & $|2\varepsilon\rangle = (|1\rangle + |2\rangle)/\sqrt{2}$.

Η κυματοσυνάρτηση είναι $|\psi(x,t)\rangle = (|0\rangle + |2\varepsilon\rangle e^{-i2\varepsilon t/\hbar})/\sqrt{2}$.

Τα στοιχεία $W_{ij}$ υπολογίζονται από την σχέση ορισμού $W_{ij} = \langle i|\hat{\omega}|j\rangle$, χαρακτηριστικά.

$W_{2\varepsilon 2\varepsilon} = \langle 2\varepsilon|\hat{\omega}|2\varepsilon\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1|+\langle 2|)(\hat{\omega}|1\rangle + \hat{\omega}|2\rangle)\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{(\langle 1|+\langle 2|)(|\omega||1\rangle - |\omega||2\rangle)}{2} = \frac{|\omega|\langle 1|1\rangle - |\omega|\langle 2|2\rangle}{2} = 0$.

Η εύρεση των συντελεστών της χρονοεξαρτώμενης κυματοσυνάρτησης, δείχνουμε από την σχέση $c_0 = \langle 0|\psi(x,t=0)\rangle = \langle 0|\mathbf{1}|1\rangle = \frac{(\langle 1|-\langle 2|)}{\sqrt{2}}|1\rangle = \frac{\langle 1|1\rangle - \langle 2|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ & αντίστοιχα $c_{2\varepsilon}$.

Με την βοήθεια των $|1\rangle$ & $|2\rangle$ η $|\psi(x,t)\rangle = \left(\frac{1+e^{i2\varepsilon t/\hbar}}{2}\right)|1\rangle + \left(\frac{e^{-i2\varepsilon t/\hbar}-1}{2}\right)|2\rangle$.

Η μπορώ να χρησιμοποιώ την ισοδύναμη κυματοσυνάρτηση

$|\psi(x,t)\rangle = \cos(\varepsilon t/\hbar)|1\rangle - i\sin(\varepsilon t/\hbar)|2\rangle$.

Στα δύο τελευταία ερωτήματα (θ) & (ι) ο φορμαλισμός Dirac θα φανεί πολύ τρόπος.

(θ) Ο μεταθέτης $[\omega,H] = \omega H - H\omega$ μιας μορφής πίνακα δίνει (χρησιμοποιούμε τις $|0\rangle$ & $|2\varepsilon\rangle$)

$-\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & |\omega| \\ |\omega| & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & |\omega| \\ |\omega| & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\varepsilon \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 2\varepsilon|\omega| \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2\varepsilon|\omega| & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -2\varepsilon|\omega| \\ 2\varepsilon|\omega| & 0 \end{bmatrix}$ (είναι 'κατά' που δόθη).

Δηλαδή $[\hat{\omega},\hat{H}] = +2\varepsilon|\omega||0\rangle\langle 2\varepsilon| - 2\varepsilon|\omega||2\varepsilon\rangle\langle 0|$.

Έτσι η μέση τιμή είναι $\langle[\hat{\omega},\hat{H}]\rangle = \left(\frac{\langle 0|+\langle 2\varepsilon|e^{+i2\varepsilon t/\hbar}}{\sqrt{2}}\right)\left(+2\varepsilon|\omega||2\varepsilon\rangle\langle 0| - 2\varepsilon|\omega||0\rangle\langle 2\varepsilon|\right)\frac{(|0\rangle+|2\varepsilon\rangle e^{-i2\varepsilon t/\hbar})}{\sqrt{2}}$

$= \frac{\langle 0|0\rangle\langle 2\varepsilon|2\varepsilon\rangle e^{-i2\varepsilon t/\hbar}}{2}(2\varepsilon|\omega|) + \frac{\langle 2\varepsilon|2\varepsilon\rangle\langle 0|0\rangle e^{+i2\varepsilon t/\hbar}}{2}(-2\varepsilon|\omega|) = -2\varepsilon|\omega|i\frac{e^{+i2\varepsilon t/\hbar} - e^{-i2\varepsilon t/\hbar}}{2i} = -2\varepsilon|\omega|i\sin(2\varepsilon t/\hbar)$

και $\frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{\omega},H]\rangle = \frac{-2\varepsilon|\omega|i}{i\hbar}\sin(2\varepsilon t/\hbar) = -\frac{2\varepsilon|\omega|}{\hbar}\sin(2\varepsilon t/\hbar)$ που σωστά είναι ίσο με το $\frac{d\langle\omega\rangle(t)}{dt}$ που υπολογίσαμε πιο παραπάνω.