Κβαντική Φυσική I

Τεστ 5

Α.Μ 1068681

πρίτσια : 20/11/2020

Θ1) $\Psi(x,0) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-2x^2/2} e^{i2px}$

Αρχικά βρίσκουμε τον παράγοντα διαπροβολής του χυματοπακέτου $c(k)$

$$c(k) = \left(\psi_{(x)}, \Psi_{(x,0)}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi^*_{(x)}\, \Psi_{(x,0)}\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ikx} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} e^{-2x^2/2} e^{i2px}\, dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{2}{2}x^2 + i(2p-k)x\right\} dx =$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{2}{2}\left[x^2 - 2\overbrace{\frac{i}{2}(2p-k)}^{\alpha} x\right]\right\} dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{2}{2}\left[x^2 - 2ax + a^2 - a^2\right]\right\} dx = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} e^{\frac{2a^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{2}{2}(x-a)^2\right\} dx}_{\text{Γκαουσιανό ολοκλήρωμα}} =$$

$$\alpha = \frac{i}{2}(2p-k)$$

$$= \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/4} e^{\frac{2}{2}\left(\frac{i}{2}(2p-k)\right)^2} \sqrt{\frac{\pi}{2/2}} = \left(\frac{4\pi}{2}\right)^{1/4} e^{-\frac{(2p-k)^2}{22}} \Rightarrow \boxed{c(k) = \left(\frac{4\pi}{2}\right)^{1/4} e^{-\frac{(2p-k)^2}{22}}}$$

$$\Psi(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} c(k)\, e^{ikx} e^{-i\frac{\hbar t}{2m}k^2} \frac{dk}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{4\pi}{2}\right)^{1/4} e^{-\frac{(2p-k)^2}{22}} e^{ikx} e^{-i\frac{\hbar t}{2m}k^2} dk = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi}{2}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{1}{22}\left[4p^2 - 4pk + k^2\right] + ixk - i\frac{\hbar t}{2m}k^2\right\} dk =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi}{2}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\frac{2p^2}{2} + \frac{2pk}{2} - \frac{k^2}{22} + ixk - i\frac{\hbar t}{2m}k^2\right\} dk = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi}{2}\right)^{1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\overbrace{\left(i\frac{\hbar t}{2m} + \frac{1}{22}\right)}^{\beta} k^2 + \overbrace{\left(\frac{2p}{2} + ix\right)}^{\gamma} k - \frac{2p^2}{2}\right\} dk =$$

$$\beta = i\frac{\hbar t}{2m} + \frac{1}{22}$$

$$\gamma = \frac{2p}{2} + ix$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi}{2}\right)^{1/4} e^{\frac{2p^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\beta\left[k^2 - \frac{\gamma}{\beta}k\right]\right\} dk = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi}{2}\right)^{1/4} e^{-\frac{2p^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\beta\left[k^2 - 2\frac{\gamma}{2\beta}k + \left(\frac{\gamma}{2\beta}\right)^2 - \left(\frac{\gamma}{2\beta}\right)^2\right]\right\} dk = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi}{2}\right)^{1/4} e^{-\frac{2p^2}{2}} e^{\frac{\gamma^2}{4\beta}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left\{-\beta\left[k - \frac{\gamma}{2\beta}\right]^2\right\} dk}_{\text{Γκαουσιανό ολοκλήρωμα}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{4\pi}{2}\right)^{1/4} e^{-\frac{2p^2}{2}} e^{\left[\left(\frac{2p}{2}+ix\right)^2 \Big/ \left(2i\frac{\hbar t}{m} + \frac{2}{2}\right)\right]} \sqrt{\frac{\pi}{i\frac{\hbar t}{2m} + \frac{1}{22}}} \Rightarrow \boxed{\Psi(x,t) = \left(\frac{1}{\pi 2}\right)^{1/4} \left(\frac{1}{2} + i\frac{\hbar t}{m}\right)^{-1/2} e^{-2p^2/2} e^{\frac{\left(x - i\frac{2p}{2}\right)^2}{\left(\frac{2}{2} + 2i\frac{\hbar t}{m}\right)}}}$$

~ Μια μικρή επιβεβαίωση ότι είχαμε βρει σωστή κυματοσυνάρτηση:

Για $t=0$

$$\Psi(x,0)=\left(\frac{1}{\pi\lambda}\right)^{1/4}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{i\hbar}{m}\cdot 0\right)^{-1/2} e^{-\frac{2p^2}{\lambda}}\, e^{-\frac{(x-\frac{2ip}{\lambda})^2}{(\frac{2}{\lambda}+\frac{2i\hbar t}{m})_{t=0}}} = \left(\frac{1}{\pi\lambda}\right)^{1/4}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{-1/2} e^{-\frac{2p^2}{\lambda}}\, e^{-\frac{\lambda}{2}\left[x^2-\frac{4ipx}{\lambda}-\frac{4p^2}{\lambda^2}\right]} = \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} \underbrace{e^{-\frac{2p^2}{\lambda}}\, e^{\frac{2p^2}{\lambda}}}_{=1}\, e^{2ipx}\, e^{-\frac{\lambda x^2}{2}}$$

Άρα η κυματοσυνάρτησή μας είναι σωστή.

~ Τώρα θα βρούμε την πυκνότητα πιθανότητας:

$$P(x,t)=|\Psi(x,t)|^2=\Psi^*(x,t)\,\Psi(x,t)=\left(\frac{1}{\pi\lambda}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\lambda}-\frac{i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(x+2ip/\lambda)^2}{(\frac{2}{\lambda}-\frac{2i\hbar t}{m})}\right\}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}\exp\left\{-\frac{(x-2ip/\lambda)^2}{\frac{2}{\lambda}+\frac{2i\hbar t}{m}}\right\}e^{-\frac{4p^2}{\lambda}}=$$

$$=\left(\frac{1}{\pi\lambda}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\hbar^2t^2}{m^2}\right)^{-1/2} e^{-4p^2/\lambda}\exp\left\{-\left[\frac{(x+ia)^2}{\beta-i\gamma}+\frac{(x-ia)^2}{\beta+i\gamma}\right]\right\}$$

$\alpha=\frac{2p}{\lambda}$

$\beta=\frac{2}{\lambda}$

$\gamma=\frac{2\hbar t}{m}$

Θα απλοποιήσουμε τον παρονομαστή μέσα στην αγκύλη [...]:

$$\frac{(x+ia)^2}{\beta-i\gamma}+\frac{(x-ia)^2}{\beta+i\gamma}=\frac{1}{\beta^2+\gamma^2}\left[(x+ia)^2(\beta+i\gamma)+(x-ia)^2(\beta-i\gamma)\right]=\frac{1}{\beta^2+\gamma^2}\left[2\beta x^2-2a^2\beta-4a\gamma x\right]=\frac{2\beta}{\beta^2+\gamma^2}\left[x^2-a^2-\frac{2a\gamma}{\beta}x\right]=\frac{2\beta}{\beta^2+\gamma^2}\left[x^2-\frac{2a\gamma}{\beta}x+\left(\frac{a\gamma}{\beta}\right)^2-\left(\frac{a\gamma}{\beta}\right)^2-a^2\right]=$$

$$=\frac{2\beta}{\beta^2+\gamma^2}\left(x-\frac{a\gamma}{\beta}\right)^2-\frac{2\beta a^2}{\beta^2+\gamma^2}\left[\frac{\gamma^2}{\beta^2}+1\right]=\frac{\left(x-\frac{a\gamma}{\beta}\right)^2}{2\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{4\beta}\right)}-\frac{2\beta a^2}{\beta^2+\gamma^2}\left(\frac{\beta^2+\gamma^2}{\beta^2}\right)=\frac{\left(x-\frac{2p\hbar t}{m}\right)^2}{2\left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{\lambda\hbar^2t^2}{2m^2}\right)}-\frac{4p^2}{\lambda}$$

Οπότε:

$$P(x,t)=\left(\frac{1}{\pi\lambda}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\hbar^2t^2}{m^2}\right)^{-1/2} e^{-4p^2/\lambda}\, e^{4p^2/\lambda}\, e^{-\frac{\left(x-\frac{2p\hbar t}{m}\right)^2}{2\left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{\lambda\hbar^2t^2}{2m^2}\right)}} \Rightarrow \boxed{P(x,t)=\left(\frac{1}{\pi\lambda}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\hbar^2t^2}{m^2}\right)^{-1/2} e^{-\frac{\left(x-\frac{2p\hbar t}{m}\right)^2}{2\left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{\lambda\hbar^2t^2}{2m^2}\right)}}}$$

Είναι η συνάρτησή μας κανονικοποιημένη;

$$\int_{-\infty}^{+\infty}P(x,t)\,dx=\left(\frac{1}{\pi\lambda}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\hbar^2t^2}{m^2}\right)^{-1/2}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{\left(x-\frac{2p\hbar t}{m}\right)^2}{\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{\hbar^2t^2}{m^2}\right)}}dx}_{\text{Γκαουσιανό ολοκλήρωμα}}=\left(\frac{1}{\pi\lambda}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\hbar^2t^2}{m^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{\pi}{\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\lambda\hbar^2t^2}{m^2}}\right)^{1/2}=\frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{\lambda\hbar^2t^2}{m^2}\right)^{-1/2}\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)^{-1/2}\pi\left(\frac{1}{\lambda}+\frac{\lambda\hbar^2t^2}{m^2}\right)^{1/2}$$

$$=1$$

Τώρα που επιβεβαιώσαμε ότι η Ψ είναι κανονικοποιημένη, μπορούμε να βρούμε τα $\langle x\rangle$, Δx, $\langle p\rangle$ με δύο τρόπους. Ο πρώτος τρόπος είναι να κάνουμε όλες τις πράξεις. Δεν θα σας αναθέσουμε αυτό τον τρόπο γιατί είναι πραγματικά βάρος.

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι έχουμε γκαουσιανό παράγοντα διαφόρισης του κυματοπακέτου, οπότε είναι της μορφής

$$P(x,t) = A\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

σταθερά

όπου $\mu \to$ η μία τιμή και $\sigma = \Delta x$

Άρα $$P(x,t) = A\, e^{-\frac{\left(x-\frac{2p\hbar t}{m}\right)^2}{2\left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{2\hbar^2t^2}{m^2}\right)}}$$ Οπότε $\boxed{\langle x\rangle(t) = \frac{2p\hbar t}{m}}$ $\boxed{\Delta x(t) = \left(\frac{1}{2\lambda}+\frac{2\hbar^2t^2}{m^2}\right)^{1/2}}$

Και από το 1ο Θεώρημα Ehrenfest: $\langle p\rangle(t) = \frac{d\langle x\rangle(t)}{dt}\cdot m \Rightarrow$ $\boxed{\langle p\rangle(t) = 2p\hbar}$

Αν κάποιος είναι ακόμα δύσπιστος, θα το αποδείξω και με τον γνωστό τρόπο:

$$\langle x\rangle(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^* x \Psi\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, P(x,t)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, A\, e^{-\frac{(x-\gamma)^2}{\beta}} dx \xrightarrow{x-\gamma=u} A\int_{-\infty}^{+\infty}(u+\gamma)\, e^{-\frac{u^2}{\beta}} du = A\int_{-\infty}^{+\infty} u\, e^{-\frac{u^2}{\beta}} du + \gamma\int_{-\infty}^{+\infty} A e^{-\frac{u^2}{\beta}} du = \gamma\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t)\, dx}_{=1} \Rightarrow$$

περιττή

$$\Rightarrow \langle x\rangle(t) = \gamma = \frac{2p\hbar t}{m}$$

Και

$$\langle p\rangle(t) = \int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*(-i\hbar)\frac{\partial\Psi}{\partial x}\, dx = -i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi^*\cdot\left(-\frac{2(x-2ip/\lambda)}{\left(\frac{2}{\lambda}+\frac{2i\hbar t}{m}\right)}\Psi(x,t)\right) = 2i\hbar\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{(x-\phi)}{\kappa}P(x,t)\, dx = \frac{2i\hbar}{\kappa}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x\, P(x,t)\, dx}_{\langle x\rangle} - \frac{2i\hbar\phi}{\kappa}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} P(x,t)\, dx}_{=1} =$$

$$= \frac{2i\hbar}{\kappa}\langle x\rangle - \frac{2i\hbar\phi}{\kappa} = \frac{2i\hbar}{\kappa}\left[\frac{2p\hbar t}{m} - \frac{2ip}{\lambda}\right) = {}^{2}4ip\hbar\,\frac{\frac{\hbar t}{m}-\frac{1}{\lambda}}{\frac{2}{\lambda}+\frac{2i\hbar t}{m}} = 2ip\hbar\,\frac{\frac{\hbar t}{m}-\frac{1}{\lambda}}{i\left(\frac{\hbar t}{m}-\frac{1}{\lambda}\right)} = 2p\hbar$$

$$A = \left(\frac{1}{\pi\beta}\right)^{1/2}\left(\frac{1}{\lambda^2}+\frac{\hbar^2t^2}{m^2}\right)^{-1/2}$$

$$\beta = \frac{1}{\lambda}+\frac{2\hbar^2t^2}{m^2}$$

$$\gamma = \frac{2p\hbar t}{m}$$

$$\kappa = \frac{2}{\lambda}+\frac{2i\hbar t}{m}$$

$$\phi = 2ip/\lambda$$

Θ2

(α) $\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2$

$= |c_1| e^{i\phi_{12}} \psi_1 + |c_2| \psi_2$ $\Bigg\} \Rightarrow |c_1| = |c_2| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \phi_{12} = 0$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) e^{-E_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2(x) e^{-E_2 t/\hbar}$$

$$P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = \Psi^* \Psi = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1 e^{i E_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2 e^{i E_2 t/\hbar} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1 e^{-i E_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2 e^{-i E_2 t/\hbar} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\psi_1^2 + \frac{1}{2}\psi_2^2 + \frac{1}{2}\psi_1\psi_2 \left(e^{i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t} + e^{-i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t} \right) = \frac{1}{2}\psi_1^2 + \frac{1}{2}\psi_2^2 + \frac{1}{2}\psi_1\psi_2 \, 2\cos(\omega t)$$

$\frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \omega$

$$\Rightarrow P(x,t) = \frac{1}{L}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{L}x\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\cos(\omega t) \right]$$

(β) $\Psi(x,0) = \frac{i}{\sqrt{2}}\psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2$

$= |c_1| e^{i\phi_{12}} \psi_1 + |c_2| \psi_2$ $\Bigg\} \Rightarrow |c_1| = |c_2| = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \phi_{12} = \frac{\pi}{2}$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1(x) e^{-E_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2(x) e^{-E_2 t/\hbar}$$

$$P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = \Psi^* \Psi = \left(-\frac{i}{\sqrt{2}} \psi_1 e^{i E_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2 e^{i E_2 t/\hbar} \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \psi_1 e^{-i E_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_2 e^{-E_2 t/\hbar} \right) =$$

$$= \frac{1}{2}\psi_1^2 + \frac{1}{2}\psi_2 + \frac{i}{2}\psi_1\psi_2 e^{i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t} - \frac{i}{2}\psi_1\psi_2 e^{-i\frac{(E_2-E_1)}{\hbar}t} = \frac{1}{2}\psi_1^2 + \frac{1}{2}\psi_2^2 + \frac{i}{2}\psi_1\psi_2 \left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t} \right) = \frac{1}{2}\psi_1^2 + \frac{1}{2}\psi_2^2 + \frac{i}{2}\psi_1\psi_2 \, 2i\sin(\omega t)$$

$\frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \omega$

$$\Rightarrow P(x,t) = \frac{1}{L}\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{L}x\right) + \sin^2\left(\frac{2\pi}{L}x\right) - 2\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{2\pi}{L}x\right)\sin(\omega t) \right]$$

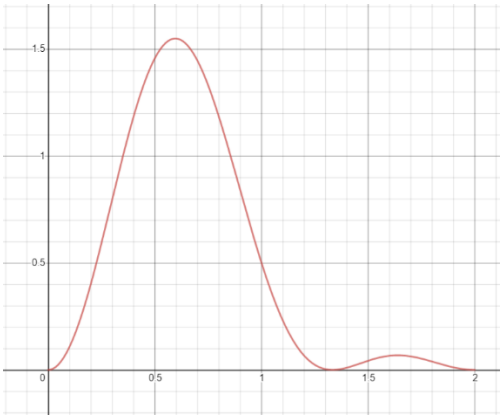
Οι γραφικές παραστάσεις για διάφορα στιγμιότυπα φαίνονται στη συνέχεια

$\omega = 0{,}2634 \cdot 10^{15}$ rad/s

$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2{,}34 \cdot 10^{-14}$ s

Για το (α) Μέρος

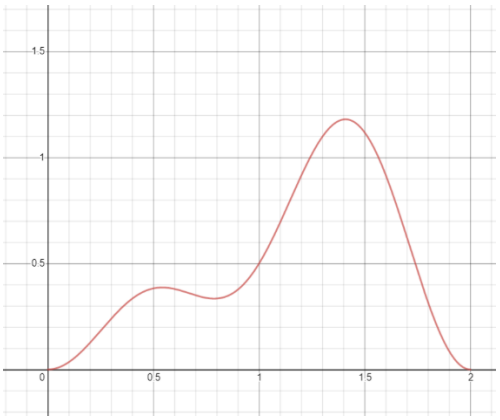
Για t=0



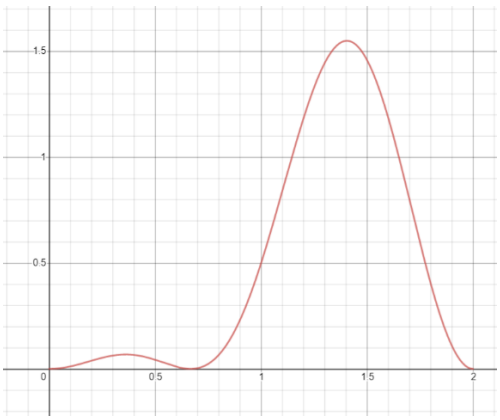
Για t=T/4=0.585*10^-14 sec



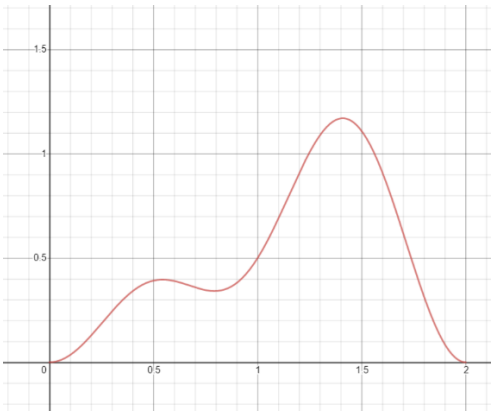
Για t=T/3=0.78*10^-14 sec



Για t=T/2=1.17*10^-14 sec



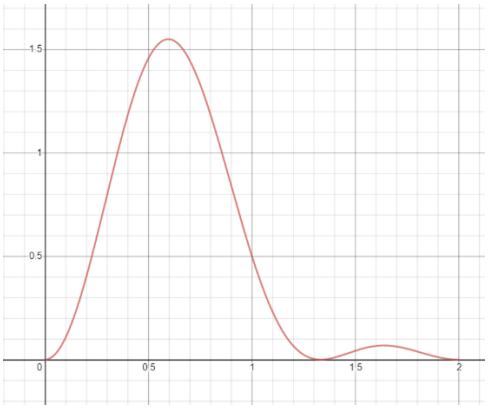
Για t=2T/3=1.56*10^-14 sec

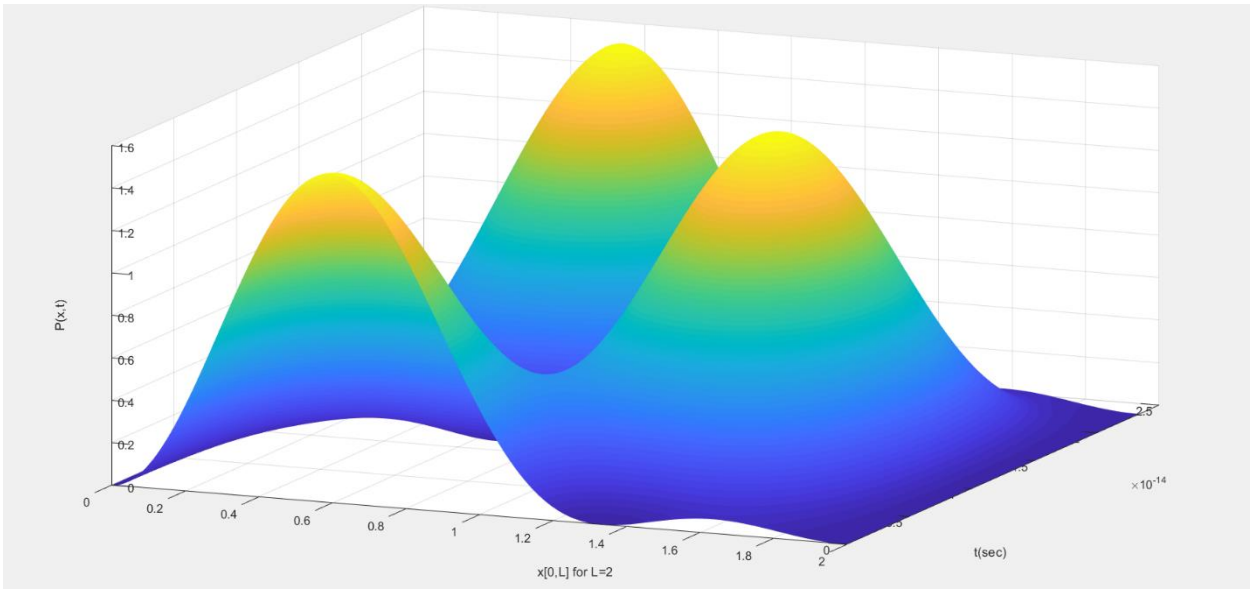


Για t=3T/4=1.75*10^-14 sec



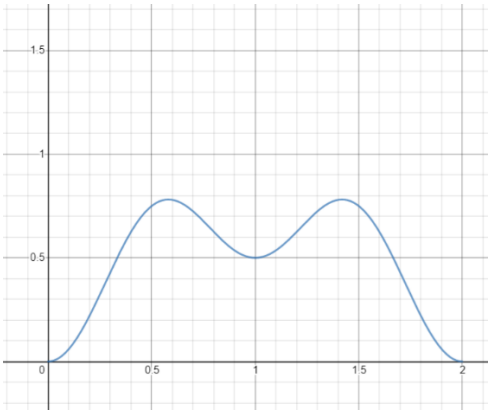
Για t=T=2.34*10^-14 sec



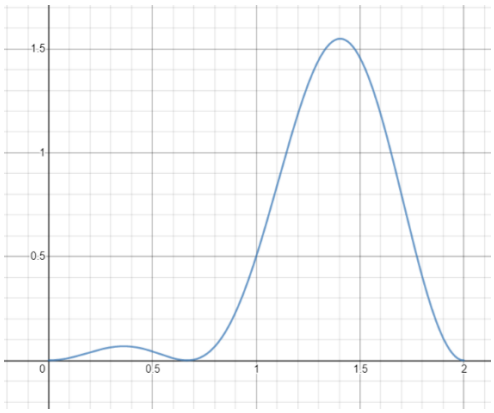


Για το (β) Μέρος

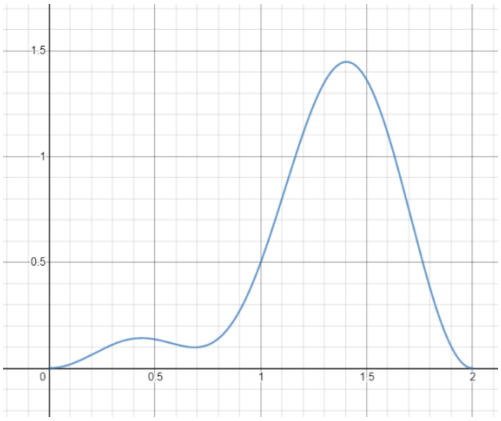
Για t=0



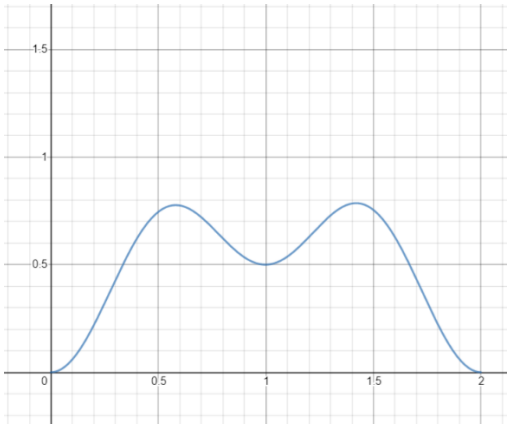
Για t=T/4=0.585*10^-14 sec



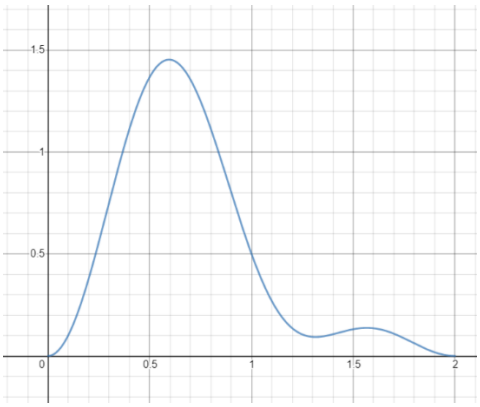
Για t=T/3=0.78*10^-14 sec



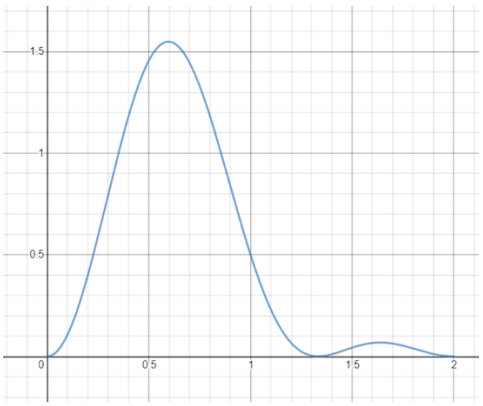
Για t=T/2=1.17*10^-14 sec



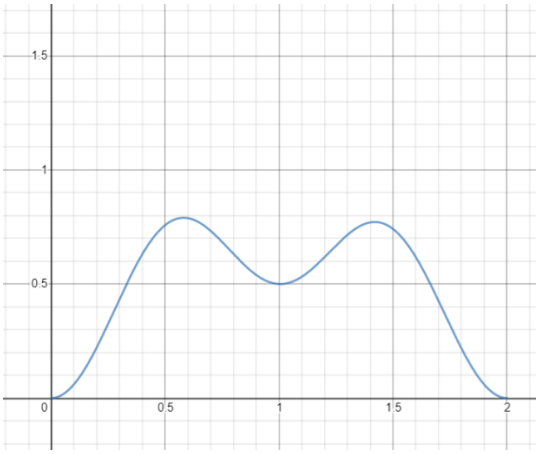
Για t=2T/3=1.56*10^-14 sec

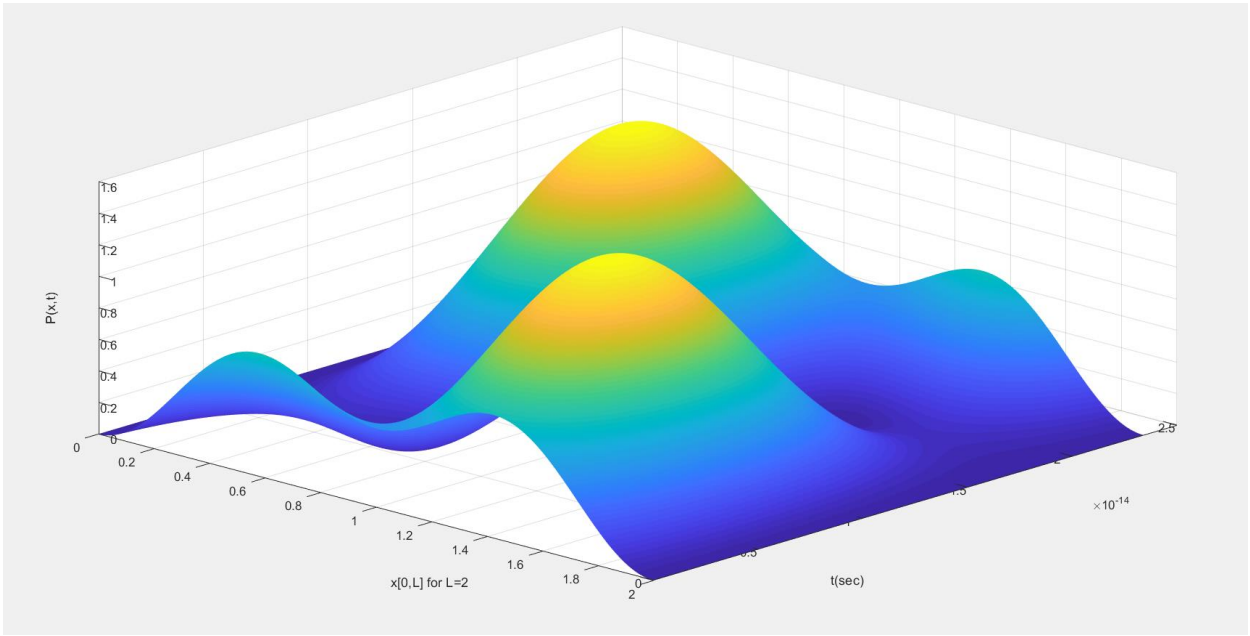


Για t=3T/4=1.75*10^-14 sec



Για t=T=2.34*10^-14 sec





Θ3/

$$\Psi(x,0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_3 \quad \Big\} \Rightarrow |c_1| = |c_3| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= |c_1| e^{i\phi_{13}}\Psi_1 + |c_3|\Psi_3 \quad \Big\} \quad \phi_{13} = 0$$

$$\Psi(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_3 e^{-E_3 t/\hbar}$$

(α) $\Sigma_{\text{το}}$ ΑΠΔ $\gamma\iota\alpha$ $[0,L]$:

$$\Psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad \Psi_n(-x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}(-x)\right) = -\Psi_n(x) \quad \rightsquigarrow \text{περιττές συναρτήσεις}$$

$$\langle \hat{P} \rangle = \left(\Psi(x,t), \hat{P}\Psi(x,t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{P}\Psi\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_1(x)e^{iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_3(x)e^{iE_3 t/\hbar}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_1(-x)e^{-iE_1 t/\hbar} + \frac{1}{\sqrt{2}}\Psi_3(-x)e^{-iE_3 t/\hbar}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left[\Psi_1(x)\Psi_1(-x) + \Psi_3(x)\Psi_3(-x) + \Psi_1(x)\Psi_3(-x)e^{-i\frac{(E_3-E_1)}{\hbar}t} + \Psi_1(-x)\Psi_3(x)e^{i\frac{(E_3-E_1)}{\hbar}t}\right] dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[-\underbrace{(\Psi_1,\Psi_1)}_{=1} - \underbrace{(\Psi_3,\Psi_3)}_{=1} - (\Psi_1,\Psi_3)e^{-i\frac{(E_3-E_1)}{\hbar}t} - (\Psi_1,\Psi_3)e^{i\frac{(E_3-E_1)}{\hbar}t} \Big] = -1$$

$$\frac{d\langle \hat{P} \rangle}{dt} = 0$$

$$[\hat{P},\hat{H}]\cdot\Psi(x) = \left(\hat{P}\hat{H} - \hat{H}\hat{P}\right)\Psi(x) = \hat{P}\left(\hat{H}\Psi(x)\right) - \hat{H}\left(\hat{P}\Psi(x)\right) = \hat{P}E\Psi(x) - \hat{H}\Psi(-x) = E\left(\Psi(-x) - \Psi(-x)\right) = 0$$

$$\langle [\hat{P},\hat{H}] \rangle(t) = 0$$

(β) Στο ΑΠΔ για $[-\frac{L}{2}, \frac{L}{2}]$

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) & n=\text{άρτιος} \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) & n=\text{περιττός} \end{cases}$$

Για $n=1,3$ (περιττοί) $\psi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{1\pi}{L}x\right) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{1\pi}{L}(-x)\right) = \psi_1(-x)$

$\psi_3(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{3\pi}{L}x\right) = \sqrt{\frac{2}{L}}\cos\left(\frac{3\pi}{L}(-x)\right) = \psi_3(-x)$

| άρτιες συναρτήσεις

$$\langle \hat{P} \rangle = \left(\Psi(x,t), \hat{P}\Psi(x,t)\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi^* \hat{P}\Psi \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\psi_1 e^{iE_1 t/\hbar} + \psi_3 e^{iE_3 t/\hbar}\right) \hat{P} \left(\psi_1 e^{-iE_1 t/\hbar} + \psi_3 e^{-iE_3 t/\hbar}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\Big[\underbrace{(\psi_1(x), \psi_1(-x))}_{=1} + \underbrace{(\psi_3(x), \psi_3(-x))}_{=1} + (\psi_1(-x), \psi_3(x))^{\,0}\, e^{i\frac{(E_3-E_1)}{\hbar}t} + (\psi_1(x), \psi_3(-x))^{\,0}\, e^{-i\frac{(E_3-E_1)}{\hbar}t} \Big] = 1$$

$$\frac{d\langle \hat{P} \rangle}{dt} = 0$$

Άλλος τρόπος:

- Στο διάστημα $[0, L]$ οι ψ_1 και ψ_3 είναι περιττές συναρτήσεις ως προς x, οπότε και η $\Psi(x,t)$ είναι περιττή.
  Ιδιοτιμή του $\hat{P}$ είναι $\xi = -1$
  Άρα $\langle \hat{P} \rangle = (\Psi, \hat{P}\Psi) = (\Psi, \xi\Psi) = \xi(\Psi, \Psi) = \xi = -1$
- Στο διάστημα $[-L/2, L/2]$ οι ψ_1 και ψ_3 είναι άρτιες συναρτήσεις, οπότε η $\Psi(x,t)$ είναι άρτια και $\xi = 1$.

$$\langle \hat{P} \rangle = (\Psi, \hat{P}\Psi) = \xi(\Psi, \Psi) = \xi = 1$$

Αν είχαμε τις ιδιοσυναρτήσεις λχ. ψ_1 και ψ_2 στο $[-L/2, L/2]$ δεν θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε τα παραπάνω για την $\Psi(x,t)$, αφού το άθροισμα περιττής και άρτιας συνάρτησης δεν είναι ούτε περιττή ούτε άρτια.