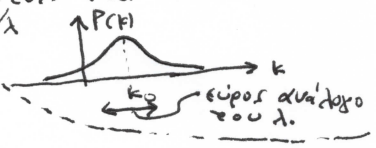
5ο Τεστ, «κβάντο Ι». Παράδοση στις «εργασίες», Δευτέρα 23/11 (23:59).

Θ1 Για το γκαουσιανό «κυματοπακέτο» του β) ερωτήματος στο Θ1 της 1ης πρόοδου να βρεθούν τα $\langle x\rangle(t)$, $\Delta x(t)$ & $\langle p\rangle(t)$.

Από 1β) Θ1, 1ης πρόοδου, $\psi(x,0)=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\lambda x^2/2} e^{i(A+1)px}$. Θέτουμε $k_0=(A+1)p$.

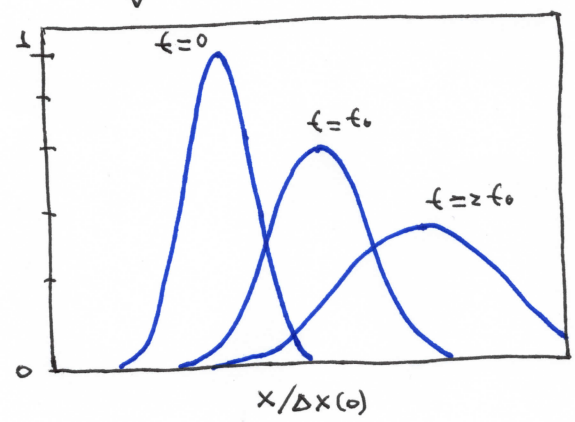
$A(k)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x,0)e^{-ikx}dx=\left(\frac{4\pi}{\lambda}\right)^{1/4}e^{-(k-k_0)^2/2\lambda}$. Δηλαδή γκαουσιανό «κυματοπακέτο» και στον χώρο των ορμών $P(k)=|A(k)|^2=\left(\frac{4\pi}{\lambda}\right)^{1/2}e^{-(k-k_0)^2/\lambda}$



$\psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}A(k)e^{ikx}e^{-i\frac{\hbar k^2}{2m}t}dk=$ .... μπολλικές πράξεις ... $=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/4}\left(1+i\frac{\hbar\lambda}{m}t\right)^{-1/2}e^{i\left[k_0x-\frac{\hbar k_0^2}{2m}t\right]}e^{-\lambda(x-\hbar k_0t/m)^2/2\left(1+i\frac{\hbar\lambda}{m}t\right)}$

«Απλώνωμα» του κινούμενου κυματοπακέτου με την πάροδο του χρόνου.

$P(x,t)=\psi^*(x,t)\psi^*(x,t)=\left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^{1/2}\left(1+\left(\frac{\hbar\lambda t}{m}\right)^2\right)^{-1/2}e^{-\lambda(x-\hbar k_0t/m)^2/\left(1+\left(\frac{\hbar\lambda t}{m}\right)^2\right)}$



Από το $P(x,t)$ βρίσκουμε

$\langle x\rangle(t)=\frac{\hbar k_0}{m}t$

$\langle p\rangle(t)=\hbar k_0$

& $[\Delta x(t)]^2=\frac{1}{2\lambda}\left[1+\left(\frac{\hbar\lambda t}{m}\right)^2\right]$

Θ2 Για ηλεκτρόνιο περιορισμένο σε περιοχή μήκους L, να αναπαρασταθεί γραφικά (στο χέρι ή με χρήση υπολογιστικού προγράμματος) διάφορα 'χρώματα' στιγμιότυπα της πυκνότητας πιθανότητας για τις κυματοσυναρτήσεις, $\psi(x,0)=\frac{\psi_1+\psi_2}{\sqrt{2}}$ & $\psi(x,0)=\frac{i\psi_1+\psi_2}{\sqrt{2}}$

Γενική περίπτωση $\psi=c_\alpha\psi_\alpha e^{-iE_\alpha t/\hbar}+c_\beta\psi_\beta e^{-iE_\beta t/\hbar}=|c_\alpha|e^{i\phi_\alpha}e^{-iE_\alpha t/\hbar}\psi_\alpha+|c_\beta|e^{i\phi_\beta}e^{-iE_\beta t/\hbar}\psi_\beta$ όπου $\phi_{\alpha\beta}$

όπου $P(x,t)=\psi^*\psi=|c_\alpha|^2\psi_\alpha^2+|c_\beta|^2\psi_\beta^2+2|c_\alpha||c_\beta|e^{i(\phi_\alpha-\phi_\beta)}e^{-i(E_\beta-E_\alpha)t/\hbar}+|c_\alpha||c_\beta|e^{-i(\phi_\alpha-\phi_\beta)}e^{-i(E_\beta-E_\alpha)t/\hbar}$

$=P_\alpha\psi_\alpha^2+P_\beta\psi_\beta^2+2|c_\alpha||c_\beta|\cos(\omega t+\phi_{\alpha\beta})\psi_\alpha\psi_\beta$

και στις δύο περιπτώσεις $|c_\alpha|=|c_\beta|=1/\sqrt{2}$, στην 1η περίπτωση $\phi_{\alpha\beta}=0$ στην 2η $\phi_{\alpha\beta}=\frac{\pi}{2}\left(i=e^{i\pi/2}\right)$

Για $\psi(x,0)=(\psi_1+\psi_2)/\sqrt{2}$ $P(x,t)=\frac{2}{L}\left[\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)+\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\omega t\right]$ με $\omega=\frac{3\hbar\pi^2}{2mL^2}$

Για $\psi(x,0)=(i\psi_1+\psi_2)/\sqrt{2}$ $P(x,t)=\frac{2}{L}\left[\sin^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)+\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\sin\omega t\right]$

και στις 2 περιπτώσεις χρωματισμένο κομμάτι





το χρωματισμένο μέρος που πολλαπλασιάζεται με $+\cos\omega t$ ή $-\sin\omega t$ .....

Θ3 Γνωρίζουμε ότι η $\psi(x,t=0)$, σε Α.Π.Δ., είναι $(\psi_1+\psi_3)/\sqrt{2}$. Να βρεθούν το $\frac{d\langle P\rangle(t)}{dt}$ και η $\langle[\hat{P},H]\rangle(t)$ για Α.Π.Δ. σε περιοχή (α) $[0,L]$ & (β) $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$. $\hat{P}$: parity.

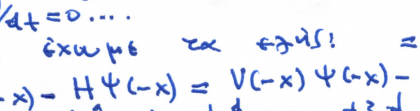
Έχουμε $\langle P\rangle(t)=|c_1|^2P_{11}+|c_3|^2P_{33}+2|c_1||c_3||P_{31}|\cos(\omega t+\phi_{13}+\delta_{\frac{P}{31}})$, με $\omega=(E_3-E_1)/\hbar$

$|c_1|=|c_3|=1/\sqrt{2}$, $\phi_{13}=0$ & $P_{11}=(\psi_1,\hat{P}\psi_1)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_1(x)\hat{P}\psi_1(x)dx=\int\psi_1(x)\psi_1(-x)dx$. Αναλόγως $P_{33}=\int\psi_3(x)\psi_3(-x)dx$

& $P_{31}=\int\psi_3(x)\psi_1(-x)dx$. Για το (β) συμμετρικό μηκάδι $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ ψ_1 & ψ_3 περιττές και $P_{11}=P_{33}=1$

και $P_{31}=(\psi_3,\psi_1)=0$. Άρα $\langle\hat{P}\rangle(t)=\frac{1}{2}1+\frac{1}{2}1=+1$.

Για το ασύμμετρο (α) $[0,L]$ χρειάζεται προσοχή. Οι συναρτήσεις ΔΕΝ είναι άρτιες ή περιττές, π.χ.



$\psi_1(x)=\begin{cases}0 & \text{για } x \text{ εκτός } [0,L]\\ \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) & \text{για } 0\le x\le L\end{cases}$ & $\psi_1(-x)=\begin{cases}0 & \text{εκτός } [-L,0]\\ -\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) & \text{για } -L\le x\le 0\end{cases}$

Οπότε όλα τα $P_{ij}=0$ και $\langle\hat{P}\rangle(t)=0$. Γενικά $d\langle P\rangle(t)/dt=0$....

Για τον τελεστή $\hat{O}$ (όρισε τον δίνουμε δυο δυσμα) $\equiv[\hat{P},\hat{H}]$ έχουμε τα εξής: $=(V(-x)-V(x))\psi(-x)$.

$\hat{O}\psi(x)=[\hat{P},\hat{H}]\psi(x)=(\hat{P}\hat{H}-\hat{H}\hat{P})\psi(x)=\hat{P}(H\psi)-\hat{H}\hat{P}\psi=\hat{H}(-x)\psi(-x)-\hat{H}\psi(-x)=V(-x)\psi(-x)-V(x)\psi(-x)$

Η τελευταία σχέση προκύπτει καθώς $H=\hat{T}+\hat{V}(x)$ $\hat{T}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx^2}$ $\propto\hat{T}(-x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{d(-x)^2}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d}{dx^2}=\hat{T}(x)$.

Για το συμμετρικό μηκάδι $[-\frac{L}{2},\frac{L}{2}]$ $V(-x)=V(x)$ και $\hat{O}\psi(x)=0.\psi(-x)=0$, οπότε και $\langle[\hat{P},H]\rangle=0$

σε συμφωνία με την σχέση $\frac{d\langle P\rangle(t)}{dt}=\frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{P},\hat{H}]\rangle$.