4ο ΤΕΣΤ, «Κβαντο Ι», 12/11/20 Α. Φ. Τσέτση

Θ1 [2] e είναι εντοπισμένο σε περιοχή $[0,L]$ και βρίσκεται στην 1η διεγερμένη κατάσταση. Διπλασιάζουμε την διάσταση της περιοχής εντοπισμού. Να εξεθθή η πιθανότητα το νέο σύστημα να βρεθεί στην θεμελιώδη του κατάσταση. Να χρήψετε μόνο την έκφραση, σε όσο πιο ακριβή μορφή μπορείτε, όχι και τον τυπολογισμό. $\psi(x,t=0) = \begin{cases} 0 & L<x\le 2L \\ \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) & 0\le x\le L \end{cases}$ (1η διεγ., $n=2$)

Θεμελιώδη Α.Π.Δ $[0,2L]$ $\psi_1(x)=\sqrt{\frac{2}{2L}}\sin\left(\frac{1\cdot\pi\cdot x}{2L}\right)$ για $0\le x\le 2L$, αλλού μηδέν.

Άρα Πιθανότητα $P_1 = \left|\int_0^L \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)dx\right|^2$, αφού $P_i=|c_i|^2$ & $c_i=(\psi_i,\psi(x,0))$

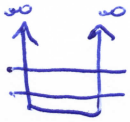
Θ2 [1+1+1] e σε $[0,L]$. Αν $\psi(x,0)=(i\psi_1+\psi_2)/\sqrt{2}$. Να εξεθουν $\psi(x,t)$, $\langle E\rangle$, $\langle x\rangle(t=0)$ & $\langle p\rangle(t)$. Δίνεται $x_{21}=-\frac{16L}{9\pi^2}$ $p_{21}=-\frac{8\hbar}{3L}i$. Οπότε $|x_{21}|=\frac{16L}{9\pi^2}$, $\delta^x_{21}=\pi$, $|p_{21}|=\frac{8\hbar}{3L}$, $\delta^p_{21}=-\frac{\pi}{2}$

$\psi(x,t)=\frac{i}{\sqrt{2}}e^{-iE_1t/\hbar}\psi_1+\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-iE_2t/\hbar}\psi_2$. Αφού $c_1=\frac{i}{\sqrt{2}}\to|c_1|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ & $\phi_{12}=\frac{\pi}{2}$ & $|c_2|=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\langle E\rangle=|c_1|^2E_1+|c_2|^2E_2=\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{2}E_2=\frac{E_1+E_2}{2}$.

$\langle x\rangle(t=0)=|c_1|^2x_{11}+|c_2|^2x_{22}+2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\delta^x_{21}+\phi_{12})=\frac{1}{2}\frac{L}{2}+\frac{1}{2}\frac{L}{2}+2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{16L}{9\pi^2}\cos\left(\pi+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{L}{2}$

$\langle p\rangle(t)=|c_1|^2p_{11}+|c_2|^2p_{22}+2|c_1||c_2||p_{21}|\cos(\omega t+\phi_{12}+\delta^p_{21})=\frac{8\hbar}{3L}\cos(\omega t+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})=\frac{8\hbar}{3L}\cos(\omega t)$.

Θ3. [2+1+1] e σε $[0,L]$.  ⇒ οι μόνες κ-τη)χρήσιμες καταστάσεις.

Αν για $t=0$ "μετράμε" $\langle x\rangle=\frac{L}{2}$ & $\langle E\rangle=\frac{7\hbar^2\pi^2}{8mL^2}$, να εξεθουν οι $\psi(x,t)$, το $\langle p\rangle(t=0)$ & το $\langle x\rangle(t)$.

$\langle E\rangle=|c_1|^2E_1+|c_2|^2E_2=(|c_1|^2+4|c_2|^2)E_1=\frac{7\hbar^2\pi^2}{8mL^2}=\frac{7}{4}\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\right)=\frac{7}{4}E_1\to|c_1|^2+4|c_2|^2=\frac{7}{4}$ (1)

και $P_1+P_2=|c_1|^2+|c_2|^2=1$ (2) $\xrightarrow{(1)-(2)}3|c_2|^2=\frac{3}{4}\to|c_2|^2=1/4\to|c_2|=1/2$ και $|c_1|^2=3/4\to|c_1|=\sqrt{3}/2$

Αφού $\langle x\rangle(t=0)=\frac{L}{2}$ και $\langle x\rangle(t)=|c_1|^2x_{11}+|c_2|^2x_{22}+2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\omega t+\phi_{12}+\delta^x_{21})\Rightarrow\frac{3}{4}\frac{L}{2}+\frac{1}{4}\frac{L}{2}+2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}|x_{21}|\cos$

$\to\langle x\rangle(t)=\frac{L}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{16L}{9\pi^2}\right)\cos(\omega t+\pi+\phi_{12})$ για $t=0\to\langle x\rangle(t=0)=\frac{L}{2}\Rightarrow\frac{16\sqrt{3}L}{18\pi^2}\cos(\phi_{12})=\frac{L}{2}\to\cos\phi_{12}=0\to\phi_{12}=\frac{\pi}{2}$

Άρα $\psi(x,t)=|c_1|e^{i\phi_{12}}\psi_1e^{-iE_1t/\hbar}+|c_2|\psi_2e^{-iE_2t/\hbar}=\frac{\sqrt{3}i}{2}\psi_1e^{-iE_1t/\hbar}+\frac{1}{2}\psi_2e^{-iE_2t/\hbar}$

Το $\langle x\rangle(t)=\frac{L}{2}-\frac{8\sqrt{3}}{9\pi^2}L\cos\left(\frac{\pi}{2}+\omega t\right)=\frac{L}{2}+\frac{8\sqrt{3}}{9\pi^2}L\sin(\omega t)$ για $\omega=\frac{E_2-E_1}{\hbar}=\frac{3E_1}{\hbar}=\frac{3\hbar\pi^2}{2mL^2}$

Τέλος $\langle p\rangle(t=0)=|c_1|^2p_{11}+|c_2|^2p_{22}+2|c_1||c_2||p_{21}|\cos(\omega t+\phi_{12}+\delta^p_{21})=2\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{1}{2}\frac{8\hbar}{3L}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{4\hbar}{\sqrt{3}L}$.