3ο ΤΕΣΤ, ΚΒΑΝΤΟ Ι, Πέμπτη 5/11, Α.Φ. Τεζιώτη

Στις ασκήσεις Θ1 έως Θ5, θεωρούμε Α.Π.Δ. διάστασης $[0,L]$.

Θ1. Αν $\psi(x,0)=(\psi_1+\psi_2)/\sqrt{2}$ να βρεθούν (α) η $\langle E\rangle$ και (β) η $\psi(x,t)$.

(α) $\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2$, $c_1=c_2=\frac{1}{\sqrt{2}} \to P_1=|c_1|^2=\frac{1}{2}$, $P_2=|c_2|^2=\frac{1}{2}$. Άρα $\langle E\rangle=P_1E_1+P_2E_2=\frac{1}{2}(E_1+E_2)=\frac{1}{2}(E_1+4E_1)=\frac{5}{2}E_1=\frac{5\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$

(β) $\psi(x,0)=c_1\psi_1+c_2\psi_2 \Rightarrow \psi(x,t)=c_1\psi_1e^{-iE_1t/\hbar}+c_2\psi_2e^{-iE_2t/\hbar}$. Οπότε $\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1e^{-iE_1t/\hbar}+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2e^{-iE_2t/\hbar}$

Θ2. Αν $\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\left(1+2\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right)$ να βρεθεί η αβεβαιότητα της E.

$\psi(x,0)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}2\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_1+\frac{1}{\sqrt{2}}\psi_2$.

$\langle E\rangle=\frac{1}{2}E_1+\frac{1}{2}E_2=\frac{5}{2}E_1$ $\quad\langle E^2\rangle=\frac{1}{2}E_1^2+\frac{1}{2}E_2^2=\frac{1}{2}E_1^2+\frac{1}{2}16E_1^2=\frac{17E_1^2}{2}$, Άρα $(\Delta E)^2=\langle E^2\rangle-\langle E\rangle^2=\frac{17}{2}E_1^2-\frac{25}{4}E_1^2=\frac{9}{4}E_1^2 \to \Delta E=\frac{3}{2}E_1$

Θ3. Αν $\psi(x,t)=\frac{1}{\sqrt{3}}\psi_1e^{-iE_1t/\hbar}+k|\psi_2e^{-iE_2t/\hbar}$, ποια η πιθανότητα να μετρήσω ενέργεια E_2.

Καθώς $\left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2+|k|^2=1 \to |k|^2=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$, $P_2=\frac{2}{3}$

Θ4. Να εξηγήσετε γιατί το ολοκλήρωμα $\int_0^L\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{6\pi x}{L}\right)dx$, είναι μηδέν.

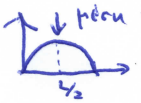
Το $\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)$ στην περιοχή $[0,L]$ είναι η $\psi_3\cdot\sqrt{\frac{L}{2}}$ και το $\sin\left(\frac{6\pi x}{L}\right)=\sqrt{\frac{L}{2}}\psi_6$.

Άρα $(\psi_3,\psi_6)=\delta_{36}=0 \to \frac{L}{2}\int_0^L\sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\sin\left(\frac{6\pi x}{L}\right)dx=0$.

Θ5. Αν $\psi(x,0)=c_1\psi_1+c_2\psi_2$, τότε $\langle x\rangle(t=0)=x_{11}|c_1|^2+x_{22}|c_2|^2+2|c_1||c_2||x_{21}|\cos(\phi_{12}+\delta_{21})$.

Να αποδείξετε, χωρίς μαθηματικές πράξεις, ότι $x_{11}=L/2$.

$x_{11}=(\psi_1,\hat{x}\psi_1)$ είναι η μέση θέση για την περίπτωση που η κυματοσυνάρτηση του συστήματος είναι η ψ_1 (θεμελιώδη κατάσταση)



Θ6. Να ελέγξετε αν ο τελεστής xp_yx είναι ερμιτιανός.

$(xp_yx)^\dagger=((xp_y)x)^\dagger=x^\dagger(xp_y)^\dagger=x^\dagger p_y^\dagger x^\dagger=xp_yx$

(πάνω: αφού x, p_y ερμιτιανοί, δηλαδή $\hat{x}^\dagger=x$ και $\hat{p}_y^\dagger=\hat{p}_y$)

Θ7. Μπορούν τα μεγέθη p_x και ℓ_x να μετρηθούν ταυτόχρονα;

$[\ell_x,p_x]=[(yp_z-zp_y),p_x]=[yp_z,p_x]-[zp_y,p_x]=y[p_z,p_x]+[y,p_x]p_z-z[p_y,p_x]-[z,p_x]p_y=0$

(όπου $[p_z,p_x]=0$, $[y,p_x]=0$, $[z,p_x]=0$)

Θ8. Να βρεθεί ο συζυγής του τελεστή $T\equiv-\frac{d}{dx}$.

$(\psi,\hat{T}\phi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^*\left(-\frac{d\phi}{dx}\right)dx=-\psi^*\phi\Big|_{-\infty}^{+\infty}+\int_{-\infty}^{+\infty}\phi\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^*dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{d\psi}{dx}\right)^*\phi \to \hat{T}^\dagger=+\frac{d}{dx}$

($-\psi^*\phi\Big|_{-\infty}^{+\infty}=0$, αφού $\psi(\pm\infty)=0$ κατασκευαστικά ολοκληρώματα)

Θ9. Από το γράφημα των ιδιοκαταστάσεων του τελεστή της ορμής και της κινητικής ενέργειας, να αποδείξετε ότι μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα.

Ιδιοσυναρτήσεις ορμής $\hat{p}\psi=p\psi \to -i\hbar\frac{d\psi}{dx}=p\psi \to \frac{d\psi}{\psi}=i\frac{p}{\hbar}dx \to \psi=\psi(0)e^{ipx/\hbar}$, $p\in(-\infty,+\infty)$

Ιδιοσυναρτήσεις κινητικής ενέργειας

$\hat{T}\psi=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2}=E\psi \to \frac{d^2\psi}{dx^2}+\frac{2mE}{\hbar^2}\psi=0 \to \psi=\psi(0)e^{ikx}$, $k\in(-\infty,+\infty)$ ($\frac{2mE}{\hbar^2}=k^2$)

Ιδιοσυναρτήσεις ίδιας μορφής και αν $p=\hbar k$, "ακριβώς" ίδιες όπως αναμένετε (βλέπε ελεύθερο σωμάτιο, όπου $\hat{H}=\hat{T}$).