2ο τέστ <<Κβαντο I>> 22/10/20 Α. Φ. Τσέμπ

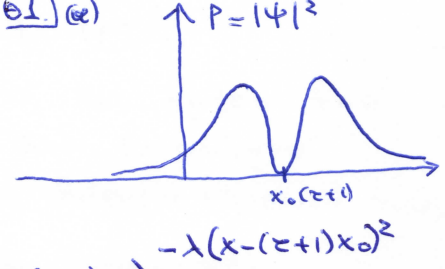
τ : ο τελευταίος αριθμός στον Α.Μ. σας.

π : ο προτελευταίος -11-

Θ1. [1+1+2] Για την κυματοσυνάρτηση $\Psi(x) = N\cdot(\pi+1)(x-(\tau+1)x_0)e^{-\lambda(x-(\tau+1)x_0)^2}$

Να βρείτε χωρίς υπολογισμούς ολοκληρωμάτων τα (α) $\langle x\rangle$ & (β) $\langle p\rangle$

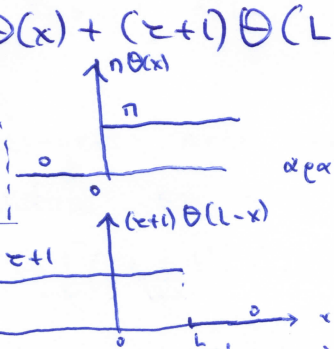
(α) "συμμετρική" πιθανότητα γύρω από $x_0(\tau+1)$ άρα $\langle x\rangle = (\tau+1)x_0$. Το (π+1) δίπλα στο N δεν λαίζει κανένα ρόλο. Γιατί? (β) $\Psi(x)$ πραγματική, άρα $\langle p\rangle = 0$.



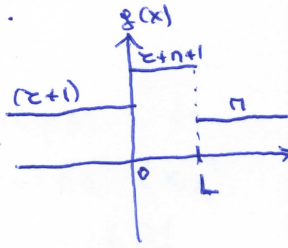
Θ2. [2] Σχεδιάστε το $g(x) = \pi\cdot\Theta(x) + (\tau+1)\Theta(L-x)$.

$\pi\Theta(x) = \begin{cases} \pi\cdot 0 = 0 & x<0 \ (\alpha) \\ \pi\cdot 1 = \pi & x>0 \ (\gamma) \end{cases}$ $(\tau+1)\Theta(L-x) = \begin{cases} (\tau+1)0 & L-x<0,\ x>L \ (\gamma) \\ (\tau+1)\cdot 1 & L-x\geq 0,\ x\leq L \ (\beta) \end{cases}$

άρα $g(x) = \begin{cases} \tau+1 & x<0 \ (\text{από } (\alpha)\ \&\ (\beta)) \\ \pi+\tau+1 & 0<x<L \ (\text{από } (\beta)\ \&\ (\beta)) \\ \pi & x>L \ (\text{από } (\beta)\ \&\ (\gamma)) \end{cases}$



άρα g(x) →



Θ3. [2](α) Να γραφεί η μορφή της κυματοσυνάρτησης $\Psi(x,t)$ για την 3η διεγερμένη κατάσταση σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού (ΑΠΔ) και (β) να αποδειχθεί ότι η μέση τιμή οποιασδήποτε φυσικής ποσότητας που είναι συνάρτηση μόνο της θέσης είναι χρονικά ανεξάρτητη.

(α) 3η διεγερμένη σε Α.Π.Δ. είναι η $\eta=4$. Άρα $\Psi(x,t) = \Psi_4(x)e^{-iE_4t/\hbar}$

με $\Psi_4(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)\Theta(x)\Theta(L-x)$ & $E_4 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}4^2 = \frac{8\hbar^2\pi^2}{mL^2}$

(β) $P(x,t) = |\Psi(x,t)|^2 = \Psi\cdot\Psi^* = \Psi_4 e^{-iE_4t/\hbar}\cdot\Psi_4\cdot e^{+iE_4t/\hbar} = \Psi_4^2$ που είναι μόνο συνάρτηση της θέσης

άρα η μέση τιμή οποιασδήποτε $f(x)$ είναι $\langle f(x)\rangle = \int f(x)\Psi_4^2(x)dx$: χρονικά ανεξάρτητη.

Θ4. [1+1+1+1=4] Θεωρούμε ηλεκτρόνιο ($m_e = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ kg) εγκλωβισμένο σε Α.Π.Δ. μήκους $L = 1$ nm. Αν χρειζούμε ότι βρίσκεται στην 1η διεγερμένη κατάσταση, να υπολογίσετε το (α) $\langle x\rangle$, (β) την πιθανότητα να βρίσκεται το e στην περιοχή $[0,\frac{L}{2}]$, (γ) $[0,\frac{L}{4}]$ και (δ) την ενέργεια του e σε eV. Δίνεται $h = 6{,}6\cdot 10^{-34}$ J·s

(α) Α.Π.Δ. 1η διεγερμένη $\eta=2$, $\Psi_2 = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$ στην περιοχή $[0,L]$ και μηδέν εκτός.



Η πιθανότητα P_2 είναι "συμμετρική" γύρω από το μέσο του Α.Π.Δ

Άρα $\langle x\rangle = \frac{L}{2}$.

(β) Η πιθανότητα στο μισό πηγάδι, λόγω της συμμετρίας, είναι το μισό δηλαδή $\frac{1}{2}$ (ή 50%)

(γ) $P\left(0<x<\frac{L}{4}\right) = \int_0^{L/4}\Psi_2^2\,dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/4}\sin^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\int_0^{L/4}\frac{1}{2}\left(1-\cos\frac{4\pi x}{L}\right)dx = \frac{2}{L}\cdot\frac{L}{8} - \frac{1}{4\pi}\frac{L}{4\pi}\sin\left(\frac{4\pi x}{L}\right)_0^{L/4} = \frac{1}{4} - \frac{\sin\pi - \sin 0}{4\pi} = \frac{1}{4}$

δηλαδή $\frac{1}{4}$ ή 25%, αναμενόμενο?

(δ) $E_2 = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}2^2 = \frac{h^2}{8mL^2}\pi^2\frac{4}{2mL^2} = \frac{h^2}{2mL^2} = \frac{6{,}6^2\cdot(10^{-34})^2}{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-31}\cdot(10^{-9})^2}(S.I.) \approx \frac{40\cdot 10^{-68}}{2\cdot 9{,}1\cdot 10^{-49}}J = \frac{40}{2\cdot 9{,}1}10^{-19}J$

διαιρώ με $1{,}6\cdot 10^{-19}$ J που είναι το 1 eV και έχουμε

$\frac{40}{2\cdot 9{,}1\cdot 1{,}6}\frac{10^{-19}}{10^{-19}}eV = \frac{40}{30}eV \sim \frac{4}{3}eV.$

~ 15