10ο τεστ, «Κβαντο Ι», 18/1/21 Α.Φ. Τσεγκα

Θ1. $|\psi(\theta,\phi)\rangle = |N|(|1,1\rangle + i|1,-1\rangle)$, να βρεθουν το $\langle \ell_x \rangle$.

Θ2. Για την τακτοποιση 1ς του αζιμιου του υδρογονου να βρεθει το $\langle V(r)\rangle$.

Θ3. Σε ατομο υδρογονοειδες, $\psi = |N|(\psi_{100} + \psi_{20k})$. Να βρεθουν
(α) το k, (β) η $\psi(t)$, (γ) η $\langle E\rangle$, (δ) $\langle \ell^2\rangle(t=0)$ και (ε) $\langle \ell_x^2 + \ell_y^2\rangle(t)$.
Βαθμολογια Θ1 [2], Θ2 [2], Θ3 [1+1+1+1+2].

Λυσεις **Θ1.** $\langle\psi|\psi\rangle = 1 = |N|^2\, 2 \to |N|^2 = 1/2 \to |N| = 1/\sqrt{2}$

$$\langle \ell_x\rangle = \langle\psi|\ell_x|\psi\rangle = \langle\psi\left|\frac{\hat\ell_+ + \hat\ell_-}{2}\right|\psi\rangle = \frac{1}{4}\left(\langle 1,1| - i\langle 1,-1|\right)\left(\hat\ell_+|1,1\rangle + i\hat\ell_+|1,-1\rangle + \hat\ell_-|1,1\rangle + i\hat\ell_-|1,-1\rangle\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\langle 1,1| - i\langle 1,-1|\right)\left(0 + i\sqrt{1(1+1)-(-1)(-1+1)}\,|1,0\rangle + \sqrt{1(1+1)-1(1-1)}\,|1,0\rangle + 0\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(i\langle 1,1|1,0\rangle + \langle 1,1|1,0\rangle - i\langle 1,-1|1,0\rangle\right) \simeq 0$$

Θ2. $\psi_{1s} = \frac{e^{-r}}{\sqrt{\pi}}$. $\langle V\rangle = \int \psi^* V \psi\, dV = -\int_0^\infty \frac{1}{r} e^{-2r} \frac{1}{\pi} 4\pi r^2 dr = -4\int_0^\infty r e^{-2r} dr = -4\frac{1!}{2^2} = -1$.

Οπου εφαρμοστηκε στο Φ.Σ.Μ. με $V = -\frac{1}{r}$.

Θ3. με λιγα (α) $k=0$, οποτε $\langle\psi,\psi\rangle = 1 = 2|N|^2 \to |N| = 1/\sqrt{2}$.
Επομ (β) $\psi(\vec r, t) = \frac{\psi_{100}(\vec r)}{\sqrt{2}} e^{-iE_1 t} + \frac{\psi_{200}(\vec r)}{\sqrt{2}} e^{-iE_2 t}$, οπου $E_n = -\frac{1}{2n^2}$ με $n = 1,2,\dots$ (Φ.Σ.Μ)

(γ) $\langle E\rangle = \frac{1}{2}E_1 + \frac{1}{2}E_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\cdot 1^2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2\cdot 2^2}\right) = -\frac{5}{16}$ Σε eV σημαινει $-\frac{5}{16}\cdot E_0 = -\frac{5}{16}\,27{,}2\,eV \simeq 8{,}5\,eV$

"κανονικοποιημενο" $= \frac{1}{2}(-13{,}6\,eV) + \frac{1}{2}(-3{,}4)\,eV = 8{,}$

(δ) $\langle \ell^2\rangle(t=0) = P_{100}\, 0\cdot(0+1)\hbar^2 + P_{200}\, 0\cdot(0+1)\hbar^2 = 0$

(ε) $\hat\ell_x^2 + \hat\ell_y^2 = \hat\ell^2 - \hat\ell_z^2$.
Εχουμε $\hat\ell^2\psi(\vec r,t) = \hat\ell^2\left(\frac{e^{iE_1 t/\hbar}}{\sqrt{2}}\psi_{100} + \frac{e^{iE_2 t/\hbar}}{\sqrt{2}}\psi_{200}\right) = \frac{e^{iE_1 t/\hbar}}{\sqrt{2}} 0(0+1)\psi_{100} + \frac{e^{iE_2 t/\hbar}}{\sqrt{2}} 0(0+1)\psi_{200} = 0$
αναλογα $\hat\ell_z^2\psi = 0$ και αφου $\hat\ell_z^2\psi_{100} = \hat\ell_z\hat\ell_z\psi_{100} = \hat\ell_z 0\psi_{100} = 0$ και $\hat\ell_z^2\psi_{200} = 0$.
Οποτε $\langle\hat\ell^2\rangle(t) = 0$ $\langle\hat\ell_z^2\rangle(t) = 0$, οποτε $\langle\hat\ell_x^2 + \hat\ell_y^2\rangle(t) = 0$.