Τελικό διαγώνισμα «Κβαντικής Φυσικής Ι» ακ. έτους 2020-2021. Παρασκευή 29 γενάρη 2021.

Για τα **εξατομικευμένα θέματα**, θα χρειαστούν οι αριθμοί

Α= ο τελευταίος αριθμός του Α.Μ. σας,

Β= ο προτελευταίος αριθμός του Α.Μ. σας.

Γ= ο δεύτερος από το τέλος αριθμός του Α.Μ. σας.

Ξεκινώντας την επίλυση των εξατομικευμένων θεμάτων να ξαναγράψετε με ευδιάκριτο τρόπο τα δεδομένα της άσκησης για τα δικά σας στοιχεία, δηλαδή αντικαθιστώντας τα αντίστοιχα Α και Β. Απαντήσεις χωρίς εξατομικευμένα δεδομένα μηδενίζονται.

Θ1.[0.5] Ο τελεστής $\widehat{W}$ ορίζεται από την σχέση $\widehat{W}\psi(x) = (A+B)\psi(x) + (\Gamma+2)\psi(-x)$. Να ελέγξετε αν είναι ερμιτιανός.

Θ2.[0.75] Ο τελεστής $\widehat{K}$ ορίζεται από την σχέση $\widehat{K} = (A+1)\hat{z}\hat{p}_y + (B+2)\hat{y}\hat{p}_z$. Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του γινομένου, $(\Delta K)(\Delta l_x)$, όπου l_x η *x*- συνιστώσα του τελεστή της στροφορμής.

Θ3.[0.25+1+0.5+0.75:**2.5**]

Θεωρούμε ένα κβαντικό σύστημα που περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή $\widehat{H} = \varepsilon \cdot (|1\rangle\langle 1| - |2\rangle\langle 2|) + \delta \cdot |1\rangle\langle 2|$.

Με βάση τις ιδιοσυναρτήσεις $|1\rangle$ και $|2\rangle$ ο ερμιτιανός τελεστής $\widehat{W}$ σε μορφή πίνακα είναι $|w|\begin{bmatrix} 1 & -i \\ i & 1 \end{bmatrix}$.

(α) Να βρεθεί η τιμή του δ στην Χαμιλτονιανή.

(β) Να βρεθούν οι ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του τελεστή $\widehat{W}$.

Την χρονική στιγμή *t*=0, μετράμε το φυσικό μέγεθος που σχετίζονται με τον τελεστή $\widehat{W}$ και βρίσκουμε θετική τιμή.

Να βρεθούν **(γ)** η $\psi(x,t)$ και **(δ)** η $\langle W \rangle(t)$.

Θ4.[0.25+0.5:**0.75**]

Ηλεκτρόνιο μάζας *m* είναι εγκλωβισμένο σε Α.Π.Δ. στην περιοχή $[0, L]$, και βρίσκεται στην κατάσταση, $\psi(x, t=0) = (i \cdot \psi_1 + \psi_2)/\sqrt{2}$. Να βρεθεί (**α**) η μέση ενέργεια και (**β**) η μέση χρονοεξαρτώμενη ορμή του.

Θ5.[0.5] Ηλεκτρόνιο μάζας *m* είναι εγκλωβισμένο σε δισδιάστατη κβαντική τελεία με $L_y = 2L_x$. Αν η ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης είναι (Α+Β+Γ) eV να βρεθεί το μήκος της κάθε πλευράς του σε Å.

Θ6.[0.25+0.5+0.75:**1.5**]

Κβαντικός αρμονικός ταλαντωτής βρίσκεται στην κατάσταση,

$|\psi(x,t=0)>=|c_0|(A+\Gamma+1)\,e^{i\,\varphi_{01}}|0>+|c_1|(2B+1)|1>.$

Να βρεθούν (**α**) το p_{10} με τον υπολογισμό του ολοκληρώματος, (**β**) το x_{10} με την αλγεβρική μέθοδο.

Αν γνωρίζουμε ότι η μέση ενέργεια και η μέση θέση είναι 1 και $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, αντίστοιχα, (**γ**) να βρεθεί η μέση χρονοεξαρτώμενη ορμή.

Θ7.[0.5+0.5:**1**] Ηλεκτρόνιο μάζας m βρίσκεται σε δυναμικό $V(x)=(A+4)|g|\delta(x-L)-(B+3)|g|\delta(x+L)$. Για τις δέσμιες ενεργειακές καταστάσεις (**α**)Να σχεδιάσετε το δυναμικό (στο ίδιο σχήμα να δείξετε και την ενέργεια) και να γράψετε τις κυματοσυναρτήσεις σε κάθε μία περιοχή. (**β**) Να γράψετε τις εξισώσεις από τις οποίες θα εκτιμηθούν οι ιδιοτιμές της ενέργειας και να εξηγείστε (σύντομα) την μεθοδολογία.

Θ8.[0.5+0.5:**1**] Ηλεκτρόνιο μάζας m βρίσκεται σε δυναμικό $V(x)=(A+3)|V_0|\Theta(-x)+(\Gamma+2)|V_0|\Theta(x-L)$. Για τις καταστάσεις σκέδασης από το $-\infty$ στο $+\infty$, με ενέργεια προσπίπτουσας δέσμης E μεγαλύτερη της $(A+\Gamma+5)|V_0|$. (**α**)Να σχεδιάσετε το δυναμικό και να γράψετε τις κυματοσυναρτήσεις σε κάθε μία περιοχή. (**β**) Να γράψετε τις εξισώσεις από τις οποίες θα εκτιμηθεί ο συντελεστής ανάκλασης και να εξηγείστε (σύντομα) την μεθοδολογία υπολογισμού του.

Θ9.[0.25+0.5+0.75:**1.5**] Η κυματοσυνάρτηση ατόμου υδρογόνου, είναι

$\Psi(\vec{r},t=0)=|N|[(A+1)\psi_{210}(\vec{r})+(B+1)\psi_{211}(\vec{r})+(\Gamma+1)\psi_{21-1}(\vec{r})]$.

Να υπολογίστε **(α)** την $\Psi(\vec{r},t)$, **(β)** την $\langle l_x^2+l_y^2\rangle(t)$ την τυχαία χρονική στιγμή t και (**γ**) την $\langle l_x\rangle(t=0)$.

Ανδρέας Φ. Τερζής, Πάτρα, 29/1/2021

Οι λύσεις στις επόμενες 3 σελίδες

Θ1. Έχουμε $(\Phi, \hat{W}\Psi) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^*(x)\, \hat{W}\Psi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi^*(x)\,[(A+B)\Psi(x) + (\Gamma+z)\Psi(-x)]\,dx =$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} ((A+B)\Phi(x))^*\,\Psi(x)\,dx + \int_{-\infty}^{+\infty} ((\Gamma+z)\Phi(x))^*\,\Psi(-x)\,dx$

(νέα μεταβλητή για το 2ο ολοκλήρωμα: $y=-x$)

$= \int_{+\infty}^{-\infty} ((\Gamma+z)\Phi(-y))^*\,\Psi(y)\,(-dy) = -\int_{-\infty}^{+\infty} ((\Gamma+z)\Phi(-y))^*\,\Psi(y)\,dy$

$= \int_{-\infty}^{+\infty} ((\Gamma+z)\Phi(-x))^*\,\Psi(x)\,dx$

άρα

$= \int_{-\infty}^{+\infty} ((A+B)\Psi(x) + (\Gamma+z)\Psi(-x))^*\,\Psi(x)\,dx = (\hat{W}\Psi, \Psi)$

Δηλαδή ο $\hat{W}$ είναι ΕΡΜΙΤΙΑΝΟΣ ΤΕΛΕΣΤΗΣ.

Θ2. Αφού $(\Delta k)(\Delta \ell_x) \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{k}, \hat{\ell}_x]\rangle|$ η ελάχιστη τιμή είναι η $\frac{|\langle[\hat{k}, \hat{\ell}_x]\rangle|}{2}$.

Χρειαζόμαστε του μετασθέτες $[\hat{z}\hat{p}_y, \hat{\ell}_x] = [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y] = [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{y}\hat{p}_z] - [\hat{z}\hat{p}_y, \hat{z}\hat{p}_y]$ (0)

$= \hat{y}[\hat{z}, \hat{p}_z]\hat{p}_y + \hat{z}[\hat{p}_y, \hat{y}]\hat{p}_z = i\hbar(\hat{y}\hat{p}_y - \hat{z}\hat{p}_z)$ & $[\hat{y}\hat{p}_z, \hat{\ell}_x] = [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{y}\hat{p}_z - \hat{z}\hat{p}_y] = [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{y}\hat{p}_z]$ (0)

$- [\hat{y}\hat{p}_z, \hat{z}\hat{p}_y] = -\hat{y}[\hat{p}_z, \hat{z}]\hat{p}_y - \hat{z}[\hat{y}, \hat{p}_y]\hat{p}_z = i\hbar(\hat{y}\hat{p}_y - \hat{z}\hat{p}_z)$

Άρα $[\hat{k}, \hat{\ell}_x] = [(A+1)\hat{z}\hat{p}_y + (B+z)\hat{y}\hat{p}_z, \hat{\ell}_x] = (A+B+3)i\hbar(\hat{y}\hat{p}_y - \hat{z}\hat{p}_z)$

Οπότε $\boxed{[(\Delta k)(\Delta \ell_x)]_{min} = \frac{\hbar}{2}(A+B+3)\,|\langle \hat{y}\hat{p}_y\rangle - \langle \hat{z}\hat{p}_z\rangle|}$

Θ3. (α) Αφού η Χαμιλτονιανή είναι ερμιτιανός τελεστής και ισχύει $H_{12} = H_{21}^*$ και αφού $H_{21} = \langle 2|\hat{H}|1\rangle = 0$, $H_{12} = \delta = 0$

(β) Διαγωνοποίηση του πίνακα W, $\det\begin{vmatrix} |w|-\lambda & -i|w| \\ i|w| & |w|-\lambda \end{vmatrix} = 0 \to \lambda^2 - 2|w|\lambda = 0 \to \lambda = 0,\ \lambda = 2|w|$

Ιδιοσυνάρτηση $|0\rangle$, από $\begin{bmatrix} |w| & -i|w| \\ i|w| & |w| \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ οπότε $\to y_0 = -ix_0$ & $|x_0|^2 + |y_0|^2 = 1$

άρα $|x_0| = |y_0| = 1/\sqrt{2}$ το $|0\rangle = (|1\rangle - i|2\rangle)/\sqrt{2}$.

Με 'ανάλογες' πράξεις $|2|w|\rangle = (|1\rangle + i|2\rangle)/\sqrt{2}$.

Αφού βρίσκουμε θετική τιμή $|\Psi(x, t=0)\rangle = |2|w|\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}|2\rangle$,

$c_1 = \langle 1|2|w|\rangle = 1/\sqrt{2}$ & $c_2 = \langle 2|2|w|\rangle = i/\sqrt{2}$, οπότε (✗) $|\Psi(x,t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-i\varepsilon t/\hbar}|1\rangle + \frac{i}{\sqrt{2}}e^{i\varepsilon t/\hbar}|2\rangle$.

καθώς από την Χαμιλτονιανή (με $\delta = 0$), καταλήξουμε ότι οι ιδιοτιμές (ιδιοσυναρτήσεις) της ενέργειας είναι οι $E(|1\rangle)$ & $-E(|2\rangle)$, αντίστοιχα.

(δ) Από την σχέση $\langle W\rangle(t) = |c_1|^2 W_{11} + |c_2|^2 W_{22} + 2|c_1||c_2||W_{21}|\cos(\omega t + \phi_{12} + \delta_{21}^W)$

υπολογίζουμε την ζητούμενη τιμή. Από τον πίνακα για τον $\hat{W}$ βρίσκουμε (αναλυτικά) τα $W_{11} = W_{22} = |w|$ και το $W_{21} = i|w| = |w|e^{i\pi/2}$, άρα $|W_{21}| = |w|$ και $\delta_{21}^W = \frac{\pi}{2}$. Επίσης $\omega = (E_2 - E_1)/\hbar = ((-\varepsilon) - \varepsilon)/\hbar = -2\varepsilon/\hbar$. Ενώ από την $|\Psi(x,t)\rangle$, έχουμε $|c_1| = |c_2| = 1/\sqrt{2}$. Ο υπολογισμός του ϕ_{12} είναι 'λεπτός'. Η σχέση που χρησιμοποιούμε έχει δύο χρησιμοποιώντας κυματοσυνάρτηση $|c_1|e^{i\phi_{12}}e^{-iE_1t/\hbar}|1\rangle + |c_2|e^{-iE_2t/\hbar}|2\rangle$, οπότε φέρνουμε την $|\Psi(x,t)\rangle$ σε αυτή την μορφή πολ/ντας με $-i$, ώστε ο συντελεστής στην $|2\rangle$ να γίνει θετικός πραγματικός ($1/\sqrt{2}$). Άρα $\phi_{12} = -\pi/2$ ($e^{i\pi/2} = -i$).

Έτσι $\langle W\rangle(t) = \frac{1}{2}|w| + \frac{1}{2}|w| + 2\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}|w|\cos(-2\varepsilon t/\hbar - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}) = |w| + |w|\cos(2\varepsilon t/\hbar)$

(αφού $\cos 2\phi = \cos^2\phi - \sin^2\phi$) $\Rightarrow$ $\boxed{\langle W\rangle(t) = 2|w|\cos^2(\frac{\varepsilon t}{\hbar})}$

Θ4. (α) $\langle E\rangle = \left|\frac{i}{\sqrt{2}}\right|^2 E_1 + \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 E_2 = \frac{1}{2}(E_1+E_2) = \frac{1}{2}(E_1+4E_1) = \frac{5}{2}E_1 = \frac{5\hbar^2\pi^2}{4mL^2}$.

(β) $\langle p\rangle(t) = |c_1|^2 p_{11} + |c_2|^2 p_{22} + 2|c_1||c_2||p_{21}|\cos(\omega t + \phi_{12} + \delta_{21}^p)$.

Όπου $|c_1| = |c_2| = 1/\sqrt{2}$, $p_{11} = p_{22} = 0$ (γιατί?), $p_{21} = -\frac{8\hbar i}{3L} = \frac{8\hbar}{3L}e^{-i\pi/2}$ ($|p_{21}| = \frac{8\hbar}{3L}$, $\delta_{21}^p = -\frac{\pi}{2}$)

και $\phi_{12} = \frac{\pi}{2}$, αφού $c_1 = \frac{i}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\frac{\pi}{2}}$.

Οπότε $\langle p\rangle(t) = \frac{8\hbar}{3L}\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{8\hbar}{3L}\cos(\omega t)$, με $\omega = \frac{E_2 - E_1}{\hbar} = \frac{3\hbar\pi^2}{2mL^2}$.

Θ5. Ενέργεια ιδιοκατάστασης n_x, n_y $E_{n_x,n_y} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL_x^2}n_x^2 + \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL_y^2}n_y^2$

Η θεμελιώδης είναι η $n_x = n_y = 1$, οπότε

$E_{1,1} = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL_x^2} + \frac{\hbar^2\pi^2}{2m(2L_x)^2} = \frac{5\hbar^2\pi^2}{8mL_x^2}$

Σε πολλές ατόμους έχουμε βρει ότι $\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2} \sim \frac{1}{3}$ eV αν $L = 1$ nm, οπότε

έχουμε $E_{1,1} = \frac{5}{4}\left[\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL_x^2}\right] \sim \frac{5}{4}\frac{1}{L_x^2}\frac{1}{3}$ eV αν το L_x είναι σε nm.

Έτσι αφού $E_{1,1} = (A+B+\Gamma)$ eV $= \frac{5}{12L_x^2}$ eV $\rightarrow$ $L_x^2 = \frac{5}{12(A+B+\Gamma)}$ σε nm^2

Οπότε τελικά $L_x = \sqrt{\frac{5}{12(A+B+\Gamma)}} \cdot 10$ Å

Θ6. (α) $P_{10} = (\psi_1, \hat{p}\psi_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2}}{\pi^{1/4}} x e^{-x^2/2}\left(-i\hbar\frac{2}{\partial x}\left[\frac{1}{\pi^{1/4}}e^{-x^2/2}\right]\right)dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}i\hbar\int x^2 e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}i\hbar\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{i\hbar}{\sqrt{2}}$

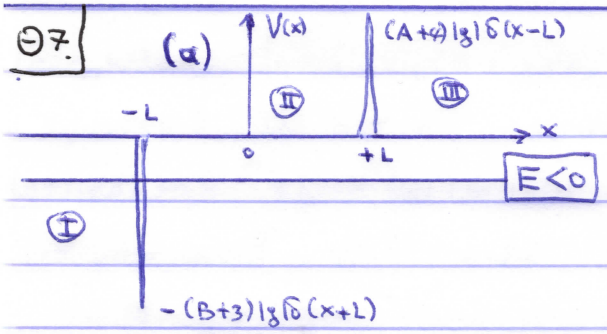
στο Φ.Σ.Μ. $\hbar = 1$ και $p_{10} = i/\sqrt{2}$

(β) $x_{10} = \langle 1|\hat{x}|0\rangle = \langle 1|\frac{\hat{a}+\hat{a}^\dagger}{\sqrt{2}}|0\rangle = \langle 1|\left(\frac{\hat{a}|0\rangle + \hat{a}^\dagger|0\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \langle 1|\left(\frac{0+|1\rangle}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\langle 1|1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

(γ) Μετονομάζω τους συντελεστές $|c_0|(A+\Gamma+1) = |c_0'|$ & $|c_1|(2B+1) = |c_1'|$, οπότε η άσκηση προκύπτει (είναι ίδια με) όπως το Θέμα 1, της τελευταίας 3ης προόδου. Από $\langle E\rangle = 1$ & $|c_0'|^2 + |c_1'|^2 = 1$ βρίσκουμε $|c_0'| = |c_1'| = 1/\sqrt{2}$.

Από $\langle x\rangle(t=0)$ βρίσκουμε $\phi_{01} = \pi$. Οπότε τελικά $\langle p\rangle(t) = \frac{\sin t}{\sqrt{2}}$

Θ7. (α)



$\psi_I = \psi(x \le -L) = Ae^{\gamma x}$

$\psi_{II} = \psi(-L < x < L) = B_+e^{\gamma x} + B_-e^{-\gamma x}$

$\psi_{III} = \psi(x \ge L) = Ce^{-\gamma x}$

με $\gamma^2 = \frac{-2mE}{\hbar^2}$

(β) Ονομάζω $g_1 = |g|(B+3)$ & $g_2 = |g|(A+4)$. Σ.Σ με συνεχή συνάρτηση και ασυνεχή παράγωγο

Σ.Σ. $x=-L$ $Ae^{-\gamma L} = B_+e^{-\gamma L} + B_-e^{\gamma L}$ $\rightarrow -e^{-\gamma L}A + e^{-\gamma L}B_+ + e^{\gamma L}B_- = 0$

$-\frac{\hbar^2}{2m}(\psi_{II}' - \psi_I') - g_1\psi(-L) = 0 \rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}(\gamma B_+e^{-\gamma L} - \gamma B_-e^{\gamma L} - \gamma Ae^{-\gamma L}) - g_1Ae^{-\gamma L} = 0 \rightarrow$

$\left(\frac{2mg_1}{\hbar^2} - \gamma\right)e^{-\gamma L}A + \gamma e^{-\gamma L}B_+ - \gamma e^{\gamma L}B_- = 0$

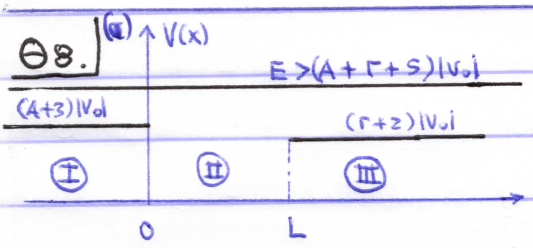
Σ.Σ $x=+L$ $B_+e^{\gamma L} + B_-e^{-\gamma L} = Ce^{-\gamma L}$ $\rightarrow$ $e^{\gamma L}B_+ + e^{-\gamma L}B_- - e^{-\gamma L}C = 0$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(-\gamma Ce^{-\gamma L} - \gamma B_+e^{\gamma L} + \gamma B_-e^{-\gamma L}\right) + g_2Ce^{-\gamma L} = 0 \rightarrow \gamma e^{\gamma L}B_+ - \gamma e^{-\gamma L}B_- + \left(\frac{2mg_2}{\hbar^2} + \gamma\right)e^{-\gamma L}C = 0$

$$\begin{bmatrix} -e^{-\gamma L} & e^{-\gamma L} & e^{\gamma L} & 0 \\ \left(\frac{2m\varepsilon_1}{\hbar^2}-\gamma\right)e^{-\gamma L} & \gamma e^{-\gamma L} & -\gamma e^{\gamma L} & 0 \\ 0 & e^{\gamma L} & e^{-\gamma L} & -e^{-\gamma L} \\ 0 & \gamma e^{\gamma L} & -\gamma e^{-\gamma L} & \left(\frac{2m\varepsilon_2}{\hbar^2}+\gamma\right)e^{-\gamma L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B_+ \\ B_- \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

για να έχουμε μη μηδενική λύση του ομογενούς συστήματος θέτουμε $\det[\ \swarrow\ ] = 0$. Που μας δίνει μιαν εξίσωση, η "επίλυση" της οποίας οδηγεί στις ιδιοτιμές της ενέργειας

Θ8. (α)



$\Psi_I(x\le 0) = \underbrace{e^{ik_I x}}_{\text{προσπίπτον από }-\infty} + \underbrace{Ae^{-ik_I x}}_{\text{ανακλώμενο}}$

$\Psi_{II}(0<x<L) = B_+ e^{ik_{II}x} + B_- e^{-ik_{II}x}$

$\Psi_{III}(x\ge L) = Ce^{ik_{III}x}$ το διερχόμενο

Με $k_I^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E-(A+3)|V_0|)$ & $k_{II}^2 = \frac{2mE}{\hbar^2}$ & $k_{III}^2 = \frac{2m}{\hbar^2}(E-(\Gamma+2)|V_0|)$

(β) Χρησιμοποιούμε τις Σ.Σ. στο $x=0$ & $x=L$.

Σ.Σ. $x=0$ $\quad 1+A = B_+ + B_-$ & $ik_I(1-A) = ik_{II}(B_+ - B_-)$

Σ.Σ $x=L$ $\quad B_+e^{ik_{II}L} + B_-e^{-ik_{II}L} = Ce^{ik_{III}L}$ & $ik_{II}(B_+e^{ik_{II}L} - B_-e^{-ik_{II}L}) = ik_{III}Ce^{ik_{III}L}$

Τα k_I, k_{II} & k_{III} είναι γνωστά αφού η ενέργεια E είναι δεδομένη. Λύνοντας το σύστημα αυτών των 4 εξισώσεων (μη ομογενές) βρίσκουμε το A, και $R = |A|^2$.

Θ9. Από συνθήκη κανονικοποίησης $|N| = [(A+1)^2 + (B+1)^2 + (\Gamma+1)^2]^{-1/2}$.

(α) $\Psi(\vec{r},t) = |N|\left((A+1)\Psi_{210} + (B+1)\Psi_{211} + (\Gamma+1)\Psi_{21-1}\right)\cdot e^{-iE_2 t} \sim \Psi(\vec{r},0)$ $\quad \{\text{όλων } E_2 = -\frac{1}{2\cdot 2^2}$ ταυτ$\}$

'πραγματική' σταθερή κανονικοποίησης έχω μία ενέργεια του E_2

(β) $\langle \ell_x^2 + \ell_y^2\rangle = \langle \ell^2 - \ell_z^2\rangle = \langle \ell^2\rangle - \langle \ell_z^2\rangle = 1\cdot(1+1) - |N|^2(B+1)^2\cdot 1^2 - |N|^2(\Gamma+1)^2(-1)^2 =$

$= 2 - \frac{(B+1)^2+(\Gamma+1)^2}{(A+1)^2+(B+1)^2+(\Gamma+1)^2} = \frac{2(A+1)^2+(B+1)^2+(\Gamma+1)^2}{(A+1)^2+(B+1)^2+(\Gamma+1)^2}$

(γ) Έχουμε $\hat{\ell}_x = \frac{\hat{\ell}_+ + \hat{\ell}_-}{2}$. Ενώ $\hat{\ell}_-\Psi_{210} = \sqrt{1(1+1)-0(0-1)}\,\Psi_{21-1} = \sqrt{2}\Psi_{21-1}$, $\hat{\ell}_+\Psi_{210} = \sqrt{2-0(0+1)}\Psi_{211} = \sqrt{2}\Psi_{211}$

$\hat{\ell}_-\Psi_{211} = \sqrt{2-1(1-1)}\Psi_{210} = \sqrt{2}\Psi_{210}$ & $\hat{\ell}_+\Psi_{21-1} = \sqrt{2-1(1+1)}\Psi_{210} = \sqrt{2}\Psi_{210}$. Ενώ η Ψ_{21-1} δεν μπορεί να υπάρχει και η Ψ_{211} να εξαφανίζεται.

Έτσι $\langle \ell_x\rangle(t=0) = \langle\Psi|\left(\frac{\hat{\ell}_+ + \hat{\ell}_-}{2}\right)|\Psi\rangle = |N|^2\int dV\left((A+1)\Psi_{210}+(B+1)\Psi_{211}+(\Gamma+1)\Psi_{21-1}\right)^*\left(\frac{\hat{\ell}_+ + \hat{\ell}_-}{2}\right)\left((A+1)\Psi_{210}+(B+1)\Psi_{211}+(\Gamma+1)\Psi_{21-1}\right)$

$= \frac{|N|^2}{2}\int dV\left((A+1)\Psi^*_{210} + (B+1)\Psi^*_{211} + (\Gamma+1)\Psi^*_{21-1}\right)\left(\sqrt{2}\overset{(A+1)}{\Psi_{211}} + \sqrt{2}\overset{(A+1)}{\Psi_{21-1}} + \sqrt{2}\overset{(B+1)}{\Psi_{210}} + \sqrt{2}\overset{(\Gamma+1)}{\Psi_{210}}\right) =$

$= \frac{|N|^2}{\sqrt{2}}\int dV\,(A+1)(B+1)\Psi^*_{210}\Psi_{210} + \frac{|N|^2}{\sqrt{2}}\int dV\,(A+1)(\Gamma+1)\Psi^*_{210}\Psi_{210} + \frac{|N|^2}{\sqrt{2}}\int dV\,(A+1)(B+1)\Psi^*_{211}\overset{\Psi_{211}}{} + \frac{|N|^2}{\sqrt{2}}\int dV\,(A+1)(\Gamma+1)\Psi^*_{21-1}\Psi_{211}$

$= \sqrt{2}|N|^2(A+1)(B+1) + \sqrt{2}|N|^2(A+1)(\Gamma+1) = \frac{\sqrt{2}(A+1)(B+\Gamma+2)}{(A+1)^2+(B+1)^2+(\Gamma+1)^2}$