



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΑΝΟΙΚΤΑ ακαδημαϊκά
μαθήματα ΠΠ

Αιολική Ενέργεια & Ενέργεια του Νερού

Ενότητα 8: Θεωρία ορμής - Σχεδίαση ρότορα
αιολικής μηχανής οριζόντιου άξονα

Γεώργιος Λευθεριώτης, Επίκουρος Καθηγητής
Σχολή Θετικών Επιστημών
Τμήμα Φυσικής



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

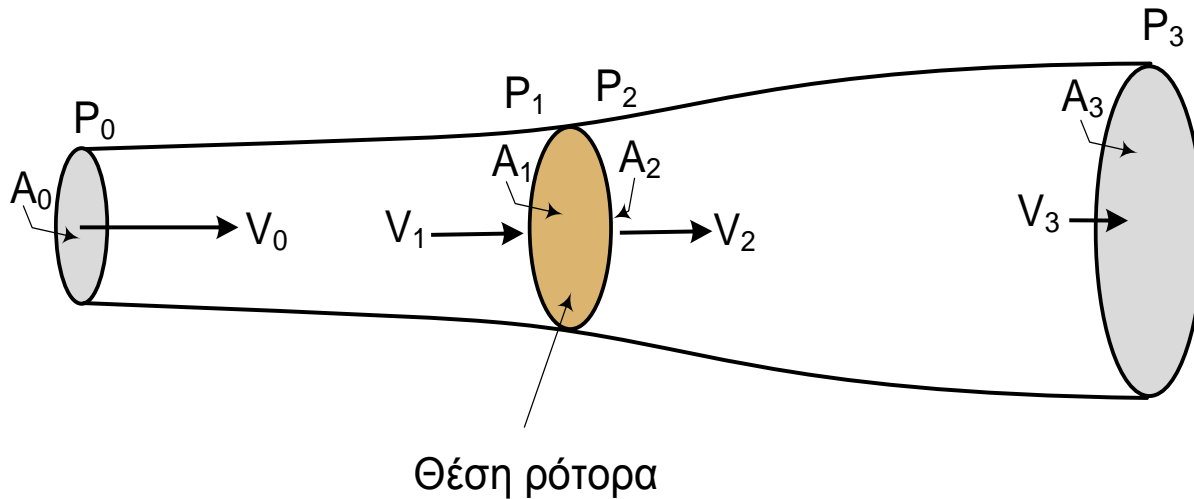
Σκοποί ενότητας

- Περιστρεφόμενο απόρρευμα
- Γεωμετρία ρότορα

Περιεχόμενα ενότητας

- Περιστρεφόμενο απόρρευμα
- Γεωμετρία ρότορα

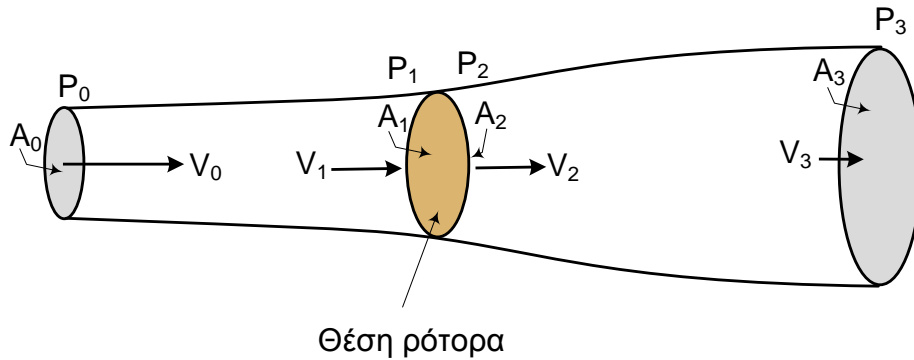
Περιστρεφόμενο απόρρευμα (1)



V_0 = ταχύτητα
αδιατάρακτου
ρευστού
 Ω = περιστροφική
ταχύτητα του
ρότορα.

- Σε άπειρη απόσταση **ανάντη του ρότορα** η περιστροφική ταχύτητα του ρευστού είναι 0 .
- Σε άπειρη απόσταση **κατάντη του ρότορα** η περιστροφική ταχύτητα είναι ω
- **Πάνω στον ρότορα** η περιστροφική ταχύτητα είναι $\omega' = 1/2(0+\omega) = \omega/2$

Περιστρεφόμενο απόρρευμα (2)



$$a = \frac{V_0 - V_1}{V_0}$$

$$\alpha' = \frac{\omega'}{\Omega} = \frac{\omega}{2\Omega}$$

Εκφράζουν την επίδραση του στοιχείου πτέρυγας στις ταχύτητες ανέμου.

Για τις θέσεις 1 και 2 ακριβώς ανάντη και κατόντη του ρότορα, έχουμε από θεώρημα **Rankine-Froude**:

$$V_1 = \frac{V_0 + V_3}{2} \Rightarrow V_3 = 2V_1 - V_0$$

Δύναμη Thrust

$$T = 2\rho V_0^2 A a(1-a)$$

Συντελεστής δύναμης Thrust

$$C_T = \frac{T}{\frac{1}{2}\rho V_0^2 A} = 4a(1-a)$$

Περιστρεφόμενο απόρρευμα (3)

$$dT = 4\rho V_0^2 a(1-a)\pi r dr (1) \rightarrow \text{Δύναμη που ασκεί το ρευστό στον ρότορα}$$

Η ροπή που ασκείται στον ρότορα από το ρευστό είναι:

$$M = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \frac{rm}{t}(\omega r - 0) \Rightarrow$$

$$\left. \begin{array}{l} M = \frac{rm}{t} \omega r \\ \frac{m}{t} = \rho V_1 A \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} M = r \rho V_1 A \omega r \\ \alpha' = \frac{\omega}{2\Omega} \Rightarrow \omega = \alpha' 2\Omega \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} M = \rho V_1 A \alpha' 2\Omega r^2 \\ V_1 = V_0 (1-a) \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} M = \rho V_0 (1-a) A \alpha' 2\Omega r^2 \\ A = 2\pi r dr \end{array} \right\} \boxed{dM = 4\rho V_0 \Omega \alpha' (1-a) \pi r^3 dr} (2)$$

Περιστρεφόμενο απόρρευμα (4)

Η στοιχειώδης ισχύς dP που παράγεται από τον ρότορα πιο συγκεκριμένα από τον 2^ο δακτύλιο του σχήματος πάχους dr δίνεται:

$$dP = dM\Omega = dTV_1 \Rightarrow dM\Omega = dTV_1 \xrightarrow[(2)]{(1)} \frac{\Omega^2 r^2}{V_0^2} = \frac{a(1-a)}{a'}$$

Ορίζω τον λόγο ταχύτητας ακροπτερυγίου: $\lambda = \frac{\Omega R}{V_0} \Rightarrow \frac{\lambda^2 r^2}{R^2} = \frac{a(1-a)}{a'}$

$$\frac{r}{R} = \mu$$



$$\lambda^2 \mu^2 = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha'} \quad \text{ή} \quad \lambda^2 r = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha'}$$

Σημείωση: Τα λ, μ είναι σταθερές όχι συναρτήσεις των α, α' !

μ : αδιάστατη ακτίνα ($\mu \in [0, 1]$)

$$dP = dM\Omega = \left[\frac{1}{2} \rho V_0^3 (2\pi r dr) \right] \frac{4\Omega^2 r^2}{V_0^2} a'(1-a) \Rightarrow$$

$$dP = dM\Omega = \left[\frac{1}{2} \rho V_0^3 (2\pi r dr) \right] 4\lambda^2 r \mu^2 a'(1-a)$$

Περιστρεφόμενο απόρρευμα (5)

Στοιχειώδης συντελεστής αεροδυναμικής απόδοσης:

$$dC_p = \frac{dP}{\frac{1}{2} \rho V_0^3 \pi R^2} \Rightarrow dC_p = 8a'(1-a) \lambda^2 \mu^3 d\mu$$

Για να βελτιώσουμε την απόδοση πρέπει να βελτιώσουμε την ποσότητα $\alpha'(1-\alpha)$!!!

$$\frac{d[\alpha'(1-\alpha)]}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \frac{da'}{da} - a \frac{da'}{da} - a' = 0 \Rightarrow \frac{da'}{da}(1-a) - a' = 0 \Rightarrow$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{da'}{da}(1-a) = a' &\Rightarrow \frac{da'}{da} = \frac{a'}{(1-a)} (*) \\ \text{Όμως: } \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha'} = \lambda^2 \mu^2 &\Rightarrow \alpha' = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda^2 \mu^2} \end{aligned} \right\} \frac{da'}{da} = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda^2 \mu^2} \Rightarrow$$

$$\frac{da'}{da} = \frac{\alpha \cancel{(1-\alpha)}}{(\cancel{1-\alpha}) \lambda^2 \mu^2} \Rightarrow \frac{da'}{da} = \frac{\alpha}{\lambda^2 \mu^2} (*)$$

Περιστρεφόμενο απόρρευμα (6)

Από τις (*) προκύπτει:

$$\frac{a'}{1-\alpha} = \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} (1-2\alpha) \Rightarrow$$

$$\alpha' \lambda^2 \mu^2 = (1-\alpha)(1-2\alpha)$$

$$\left. \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha'} = \lambda^2 \mu^2 \Rightarrow \alpha' \lambda^2 \mu^2 = \alpha(1-\alpha) \right\}$$

$$\alpha \cancel{(1-\alpha)} = \cancel{(1-\alpha)} (1-2\alpha) \Rightarrow \alpha = 1-2\alpha \Rightarrow 3\alpha = 1 \Rightarrow \alpha_{opt} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{\alpha_{opt} = \frac{1}{3} \rightarrow}$$

Συνθήκη βελτιστοποίησης για α

Περιστρεφόμενο απόρρευμα (7)

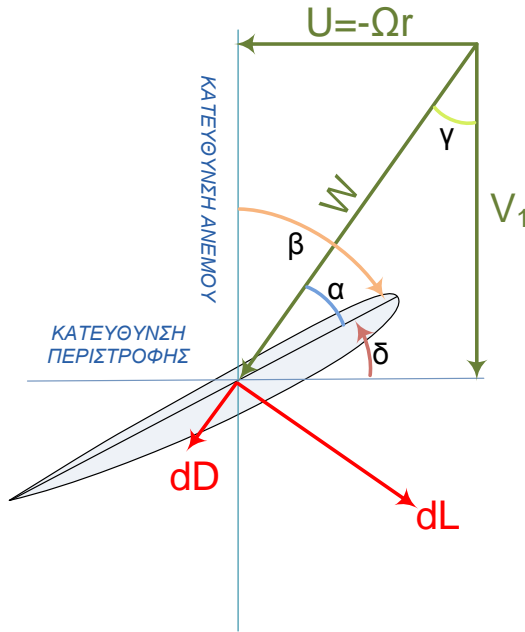
Για το α'_{opt} προκύπτει:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha(1-\alpha)}{\alpha'} = \lambda^2 \mu^2 \Rightarrow \\ \alpha' = \frac{\alpha(1-\alpha)}{\lambda^2 \mu^2} \\ \alpha_{opt} = \frac{1}{3} \end{aligned} \right\} a' = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9} \right) \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \Rightarrow \boxed{a' = \frac{2}{9} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2}}$$

Οπότε για το C_p

$$\left. \begin{aligned} dC_p &= 8a'(1-a)\lambda^2 \mu^3 d\mu \\ \alpha_{opt} &= \frac{1}{3} \\ a' &= \frac{2}{9} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \end{aligned} \right\} dC_p = 8 \frac{2}{9} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \left(1 - \frac{1}{3} \right) \lambda^2 \mu^3 d\mu \Rightarrow \dots$$
$$\int dC_p = C_p \Rightarrow \dots \Rightarrow \boxed{C_p = \frac{16}{27}}$$

Γεωμετρία ρότορα (1)



Άξονας y: Κατεύθυνση ανέμου

Άξονας x: Κατεύθυνση κίνησης πτερυγίου

Ποια η χορδή c και τη γωνία δ ώστε να μεγιστοποιηθεί η ισχύς;

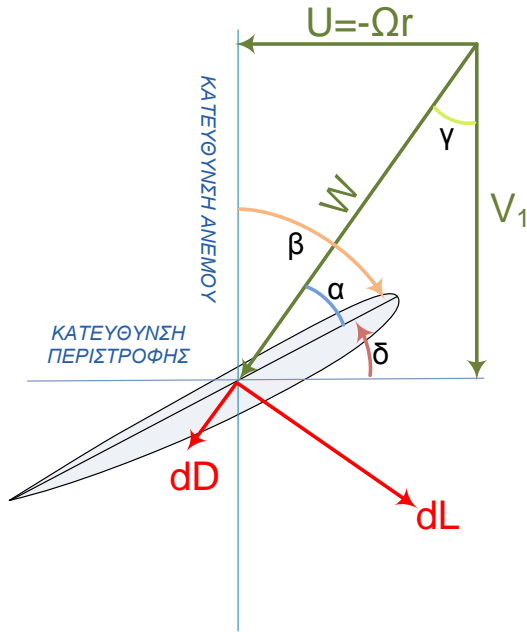
Για το ορθογώνιο τρίγωνο του σχήματος ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha + \delta + \gamma = \frac{\pi}{2} \\ \alpha = \alpha_{opt} \end{array} \right\} \alpha_{opt} + \delta + \gamma = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \delta = \frac{\pi}{2} - \alpha_{opt} - \gamma$$

Από τις: $\tan \gamma = \frac{\Omega r (1 + a')}{V_0 (1 - a)}$ (3), $\lambda = \frac{\Omega r}{V_0}$ (4), $\alpha_{opt} = \frac{1}{3}$ (5), $a'_{opt} = \frac{2}{9} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2}$ (6),

... $\Rightarrow \tan \gamma = \frac{3}{2} \lambda \mu$

Γεωμετρία ρότορα (2)



Οπότε:
$$\delta = \frac{\pi}{2} - \arctan \left[\frac{3}{2} \lambda \mu + \frac{1}{3 \lambda \mu} \right] - \alpha_{opt}$$

Με
περιστρ.
απορ

Σύγκριση με:

$$\delta = \frac{\pi}{2} - \arctan \left[\frac{3}{2} \lambda_D \frac{r}{R} \right] - \alpha_{opt}$$

Χωρίς
περιστρ.
απορ

Από θεωρία Betz:
$$V_1 = \frac{2}{3} V_0$$

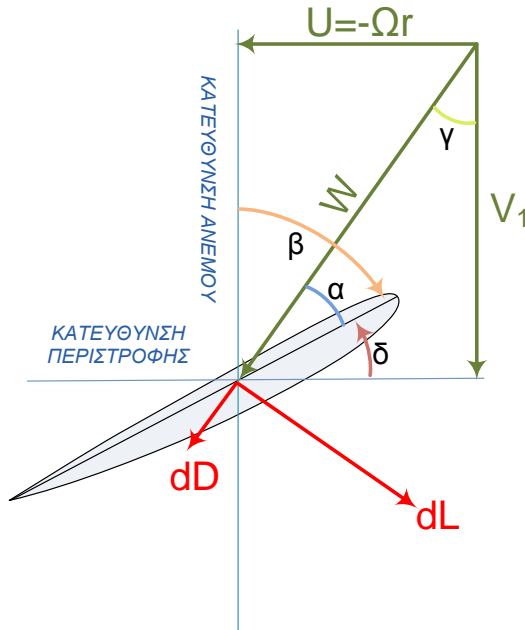
οπότε η φαινόμενη ταχύτητα ενός στοιχείου πτέρυγας στο όριο Betz θα είναι:

$$w = \sqrt{V_1^2 + (\Omega r)^2} = \sqrt{\frac{4}{9} V_0^2 + (\Omega r)^2}$$

η γωνία γ στο όριο Betz θα είναι:

$$\tan \gamma = \frac{\Omega r}{V_1} = \frac{\Omega r}{\frac{2}{3} V_0} = \frac{3 \Omega r}{2 V_0} = \frac{3 \Omega R}{2 V_0} \frac{r}{R} = \frac{3}{2} \lambda \frac{r}{R}$$

Γεωμετρία ρότορα (3)



Ο συντελεστής ισχύος της αιολικής μηχανής μεγιστοποιείται αν ισχύει:

$$dP_{\text{Betzí}} = N dP_{\text{στοιχειου πτ ρυγας}} \Rightarrow \frac{16}{27} \frac{1}{2} \rho V_0^3 (2\pi r dr) = N dF_{\text{κιν}} \Omega r \Rightarrow$$

$$\frac{16}{27} \frac{1}{2} \rho V_0^3 (2\pi r dr) = N \Omega r \frac{1}{2} W^2 C_L \cos \gamma c dr \Rightarrow$$

$$c = \frac{16}{27} \frac{2\pi V_0^3}{C_L N W^2 \cos \gamma \Omega}$$

$$\lambda_D = \frac{\Omega R}{V_0}$$

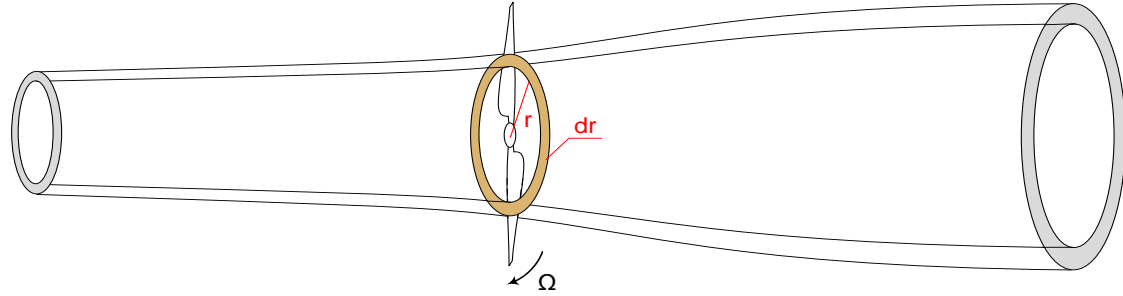
$$W \cos \gamma = V_1 = \frac{2}{3} V_0$$

$$\frac{W}{V_0} = \sqrt{\frac{4}{9} + \lambda_D^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2}$$

$$c = \frac{8}{9} \frac{2\pi R}{C_L N \lambda_D} \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{9} + \lambda_D^2 \left(\frac{r}{R}\right)^2}}$$

Γεωμετρία ρότορα (4)

Για να βρούμε τη χορδή c δουλεύουμε ως εξής:



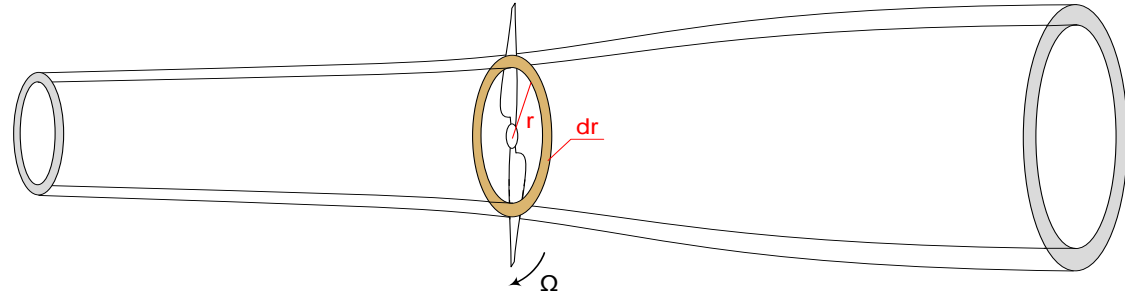
Χωρίζουμε την επιφάνεια του ρότορα σε **δακτυλίους** που ο καθένας περιέχει από ένα **στοιχείο πτέρυγας** για κάθε πτερύγιο του ρότορα. Με τη παραδοχή ότι οι γειτονικοί δακτύλιοι δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους εφαρμόζουμε τα αποτελέσματα της **θεωρίας Betz** σε κάθε στοιχείο πτέρυγας ξεχωριστά

$$W = \sqrt{V_0^2 (1-a)^2 + \Omega^2 r^2 (1+a')^2} \Rightarrow W = \sqrt{V_0^2 (1-a)^2 + \frac{\Omega^2 r^2 V_0^2}{V_0^2} (1+a')^2} \Rightarrow$$

$$\frac{W}{V_0} = \sqrt{(1-a)^2 + \lambda^2 \mu^2 (1+a')^2} \Rightarrow \frac{W}{V_0} = \sqrt{\frac{4}{9} + \lambda^2 \mu^2 \left(1 + \frac{2}{9} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2}\right)^2}$$

Γεωμετρία ρότορα (5)

Ο συντελεστής ισχύος της αεροδυναμικής μηχανής μεγιστοποιείται αν ισχύει το όριο Betz σε κάθε στοιχείο πτέρυγας:



$$dP_{Betz} = N_\xi dP_{\text{στοιχειοδύπτ. ρυγας}} \Rightarrow \frac{16}{27} \frac{1}{2} \rho V_0^3 (2\pi r dr) = N dF_{κιν} \Omega r \quad \text{που } dF \text{ εξαρτάται τόσο από την άντωση όσο και από την οπισθέλκουσα}$$

$$dF_{κιν} = dL \cos \gamma - dD \sin \gamma = \frac{1}{2} \rho W^2 (C_L \cos \gamma - C_D \sin \gamma) c dr$$

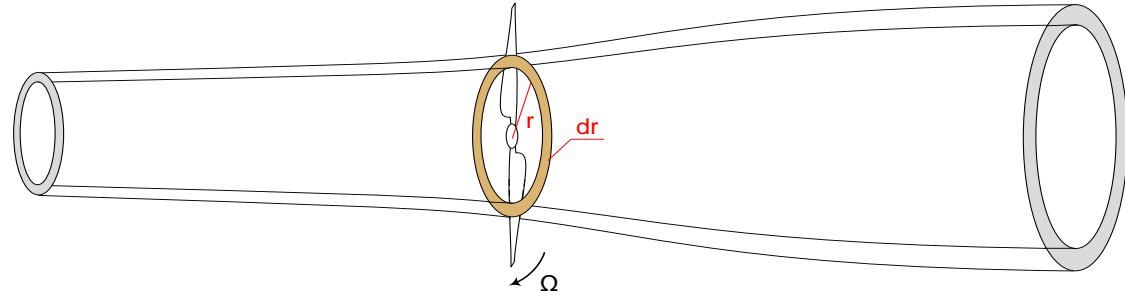
Εφόσον στην παρούσα ανάλυση αναφερόμαστε στην ιδανική κατάσταση (δηλαδή στο όριο Betz) η επίδραση της dD **δεν** πρέπει να ληφθεί υπόψη. Οπότε:

$$dF_{κιν} = dL \cos \gamma = \frac{1}{2} \rho W^2 C_L \cos \gamma c dr$$

Άρα:

$$c = \frac{16}{27} \frac{2\pi V_0^3}{C_L N W^2 \cos \gamma \Omega} \quad (7)$$

Γεωμετρία ρότορα (6)



Κάνοντας τις εξής διορθώσεις:

$$W = \sqrt{V_0^2 (1-a)^2 + \frac{\Omega^2 r^2 V_0^2}{V_0^2} (1+a')^2} \Rightarrow$$

$$\frac{W}{V_0} = \sqrt{(1-a)^2 + \lambda^2 \mu^2 (1+a')^2} \Rightarrow$$

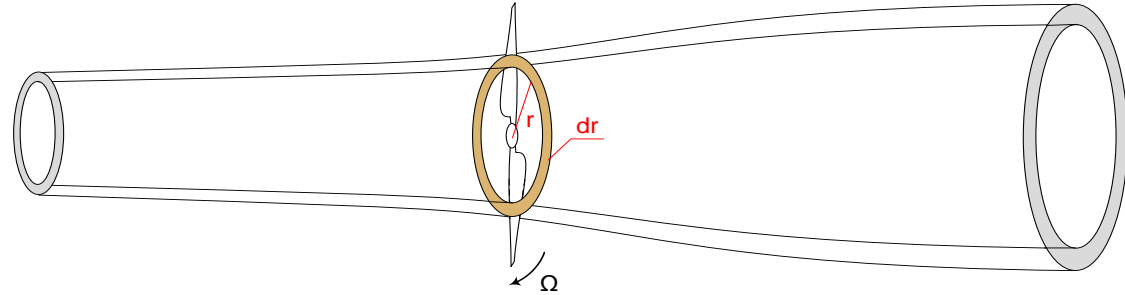
$$\frac{W}{V_0} = \sqrt{\frac{4}{9} + \lambda^2 \mu^2 \left(1 + \frac{2}{9} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2}\right)^2}$$

Προκύπτει:

$$(7) \xrightarrow{(8)} c = \frac{8}{9} \frac{2\pi R}{C_L \lambda N} \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{9} + \lambda^2 \mu^2 \left(1 + \frac{2}{9} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2}\right)^2}}$$

Γεωμετρία ρότορα (7)

Διόρθωση οπισθέλκουσας



Μπορούμε να εισάγουμε διορθώσεις στον υπολογισμό του προφίλ του πτερυγίου και του συντελεστή ισχύος C_p αν λάβουμε υπόψη τη διόρθωση της οπισθέλκουσας. Πρώτα βρίσκουμε τη διόρθωση για τη χορδή:

$$dP_{Betzi} = N dP_{\text{στοιχειου πτερυγας}} \Rightarrow \dots$$

$$\Rightarrow c' = \frac{16}{27} \frac{2\pi V_0^3}{C_L N W^2 \cos \gamma \Omega} \frac{1}{1 - \frac{C_D}{C_L} \tan \gamma}$$

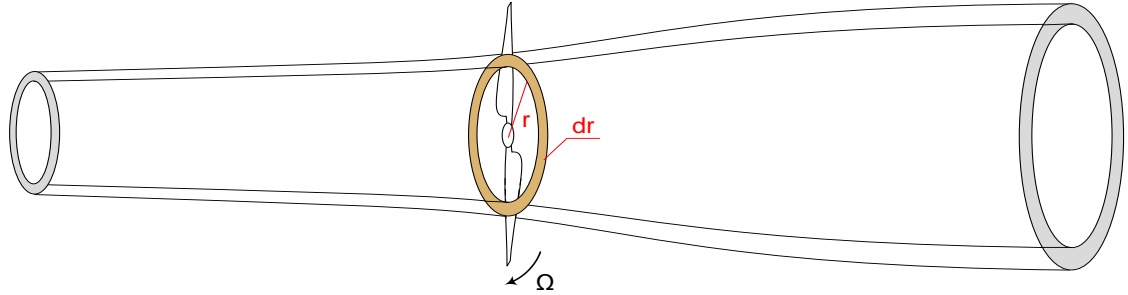
$$c = \frac{16}{27} \frac{2\pi V_0^3}{C_L N W^2 \cos \gamma \Omega}$$

$$\tan \gamma = \frac{3}{2} \lambda \mu \left(1 + \frac{2}{9} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right)$$

$$c' = c \frac{1}{1 - \frac{3}{2} \frac{C_D}{C_L} \lambda \mu - \frac{1}{3} \frac{C_D}{C_L} \frac{1}{\lambda \mu}}$$

Γεωμετρία ρότορα (8)

Η οπισθέλκουσα **δεν έχει επίδραση** στη γωνία στρέψης της πτέρυγας καθώς δεν προκαλεί μεταβολές ούτε στις φαινόμενες ταχύτητες ούτε στη γωνία προσβολής.



Η D επιδρά όμως στην παραγόμενη ισχύ η οποία δεν μπορεί παρά να είναι μικρότερη από εκείνη της ιδανικής κατάστασης.

$$dP' = NdF_{κιν} \Omega r \Rightarrow dP' = N\Omega r \frac{1}{2} \rho W^2 (C_L \cos \gamma - C_D \sin \gamma) cdr \Rightarrow$$

$$N\Omega r \frac{1}{2} W^2 C_L \cos \gamma cdr \left(1 - \frac{C_D}{C_L} \tan \gamma \right)$$

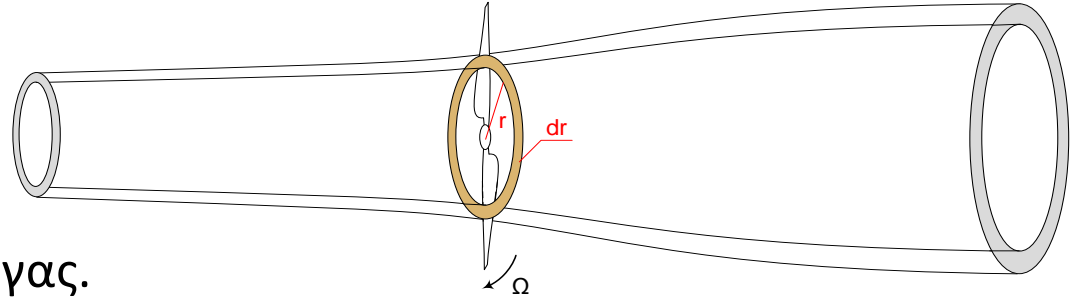
$$dP_{Betz} = N\Omega r \frac{1}{2} C_L \cos \gamma cdr$$

$$\tan \gamma = \frac{3}{2} \lambda \mu \left(1 + \frac{2}{9} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} N\Omega r \frac{1}{2} W^2 C_L \cos \gamma cdr \left(1 - \frac{C_D}{C_L} \tan \gamma \right) \\ dP_{Betz} = N\Omega r \frac{1}{2} C_L \cos \gamma cdr \\ \tan \gamma = \frac{3}{2} \lambda \mu \left(1 + \frac{2}{9} \frac{1}{\lambda^2 \mu^2} \right) \end{array} \right\} dP' = dP_{Betz} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{C_D}{C_L} \lambda \mu - \frac{1}{3} \frac{C_D}{C_L} \frac{1}{\lambda \mu} \right)$$

Γεωμετρία ρότορα (9)

$$dP' = dP_{Betz} \left(1 - \frac{3 C_D}{2 C_L} \lambda \mu - \frac{1 C_D}{3 C_L} \frac{1}{\lambda \mu} \right)$$



Που ισχύει για **κάθε** στοιχείο πτέρυγας.

Για την απλούστερη περίπτωση: $\frac{C_L}{C_D} = ct$ και δεδομένου: $dP_{Betz} = \frac{16}{27} \frac{1}{2} \rho V_0^3 (2\pi r dr)$

Για όλο το μήκος πτέρυγας προκύπτει:

$$P' = \int_0^R dP \Rightarrow P' = P_{Betz} \left(1 - \frac{C_D}{C_L} \lambda - \frac{2 C_D}{3 C_L} \frac{1}{\lambda} \right)$$

Υπολογισμός κυκλοφορίας στα πτερύγια:

$$\left. \begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \rho W^2 C_L c = \rho W \Gamma \\ c &= \frac{8}{9} \frac{2\pi R}{C_L N \lambda} \frac{V_0}{W} \end{aligned} \right\} \Gamma = \frac{1}{2} \rho W C_L c \text{ όπου } c = \frac{8}{9} \frac{2\pi R}{C_L N \lambda} \frac{V_0}{W}$$

Τέλος Ενότητας



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στο πλαίσιο του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.



Σημείωμα Ιστορικού Εκδόσεων Έργου

Το παρόν έργο αποτελεί την έκδοση **1.0**.



Σημείωμα Αναφοράς

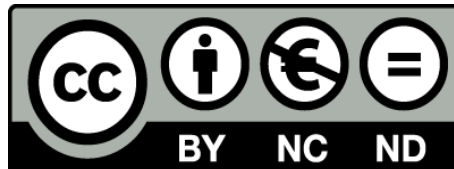
Copyright Πανεπιστήμιο Πατρών, Λευθεριώτης Γεώργιος, 2015. «Αιολική Ενέργεια & Ενέργεια του Νερού, Ενότητα: Θεωρία Ορμής - Σχεδίαση ρότορα αιολικής μηχανής οριζόντιου άξονα» Έκδοση: 1.0. Πάτρα 2015. Διαθέσιμο από τη δικτυακή διεύθυνση:

<https://eclass.upatras.gr/modules/units/?course=PHY1954&id=4292>



Σημείωμα Αδειοδότησης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.



Διατήρηση Σημειωμάτων

Οποιαδήποτε αναπαραγωγή ή διασκευή του υλικού θα πρέπει να συμπεριλαμβάνει:

- το Σημείωμα Αναφοράς
- το Σημείωμα Αδειοδότησης
- τη δήλωση Διατήρησης Σημειωμάτων
- το Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων (εφόσον υπάρχει)

μαζί με τους συνοδευόμενους υπερσυνδέσμους.



Σημείωμα Χρήσης Έργων Τρίτων

