



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ
ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι

ΘΕΩΡΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Ενότητα 3: Κατανομή Gauss

Μέση τιμή & Τυπική απόκλιση

ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS

- Σύμφωνα με τη στατιστική αν ένα φαινόμενο είναι πράγματι τυχαίο, τότε η οριακή κατανομή που θα προκύψει μετά από άπειρες προσπάθειες θα είναι **η κανονική κατανομή ή κατανομή Gauss**.
- Η κατανομή Gauss είναι η πιο κοινή κατανομή στην θεωρία πιθανοτήτων:
Εάν επαναλάβουμε ένα πείραμα πολλές φορές (...άπειρες...) τότε το αποτέλεσμα περιγράφεται από τη συμμετρική καμπύλη (-κώδωνας-) Gauss.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS

N	R(KΩ)
1	5,75
2	6,50
3	5,94
4	5,16
5	4,96
6	5,84
7	5,14
8	5,51
9	5,71
10	4,98
11	5,61
12	4,50
13	5,54
14	5,70
15	5,41
16	5,73
17	5,59
18	5,52
19	5,30
20	5,18

Ιστόγραμμα – Πολύγωνο συχνοτήτων

Μέτρηση της αντίστασης ενός αντιστάτη

Οι μετρήσεις κατανέμονται στο διάστημα μεταξύ 4,5 KΩ και 6,5 KΩ

Μέση τιμή : $\bar{R} = 5.470\text{K}\Omega$

Εύρος τιμών: $6,5 - 4,5 = 2 \text{ K}\Omega$

Κλάσεις = $k = 1 + 3,3\log(N) = 5$

Στρογγυλοποιείται στον κοντινότερο ακέραιο

Πλάτος κλάσης = $2/5 = 0,4 \text{ K}\Omega$

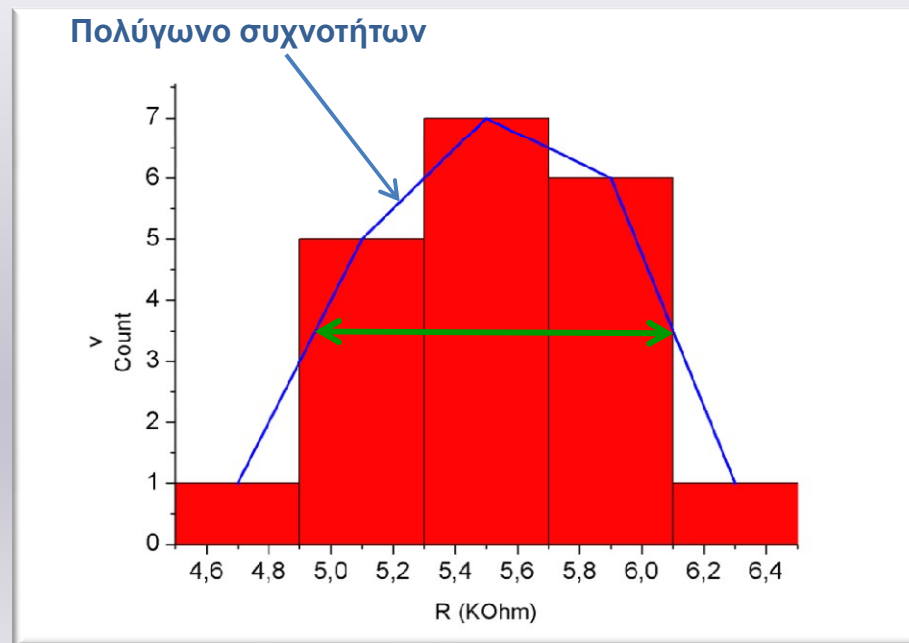
ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ

Αντίσταση (KΩ)	ν
4,5 – 4,9	1
4,9 – 5,3	5
5,3 – 5,7	7
5,7 – 6,1	6
6,1 – 6,5	1

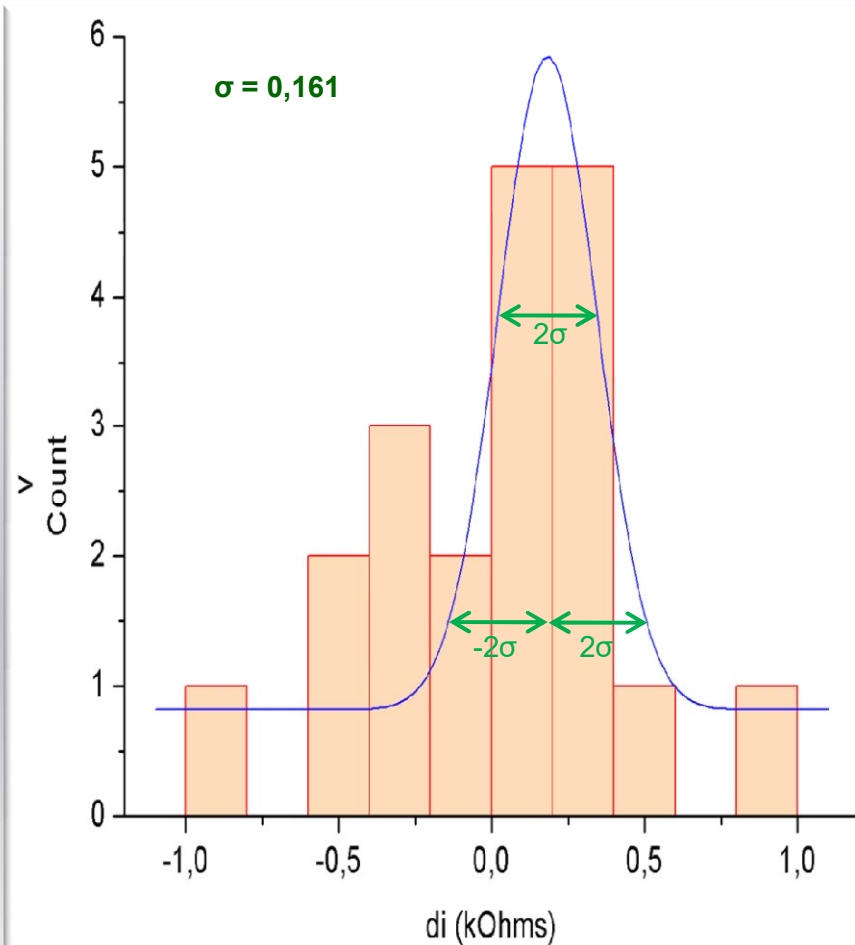
ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS

Ιστόγραμμα –Πολύγωνο Συχνοτήτων

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ	
Αντίσταση (ΚΩ)	ν
4,5 – 4,9	1
4,9 – 5,3	5
5,3 – 5,7	7
5,7 – 6,1	6
6,1 – 6,5	1



ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS



Το εύρος των διαστημάτων σε ένα ιστόγραμμα πρέπει να μην είναι: **ούτε πολύ μεγάλο** [διότι τότε μεγάλο πλήθος των μετρήσεων θα περιλαμβάνεται σε ένα μόνο διάστημα!],

ούτε πολύ μικρό [διότι τότε θα υπάρχουν διαστήματα τα οποία δεν θα περιέχουν καμία μέτρηση!],

με αποτέλεσμα το ιστόγραμμα να μη δίνει σωστές πληροφορίες....

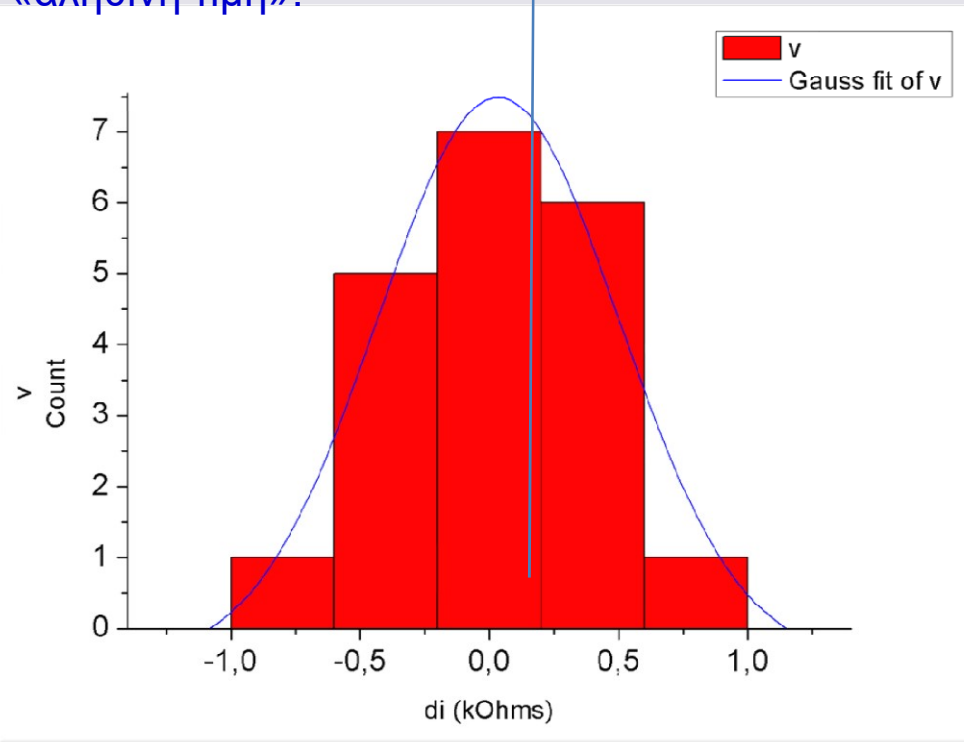
Αυξάνοντας το συνολικό πλήθος των μετρήσεων, έχουμε τη δυνατότητα να επιλέγουμε όλο και μικρότερα διαστήματα για την κατασκευή του ιστογράμματος!

ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS

N	R(KΩ)	$d_i = R_i - \bar{R}$ (KΩ)
1	5,75	0,28
2	6,41	0,94
3	5,94	0,47
4	5,16	-0,31
5	4,96	-0,51
6	5,84	0,37
7	5,14	-0,33
8	5,51	0,04
9	5,71	0,24
10	4,98	-0,49
11	5,61	0,14
12	4,50	-0,97
13	5,54	0,07
14	5,70	0,23
15	5,41	-0,06
16	5,73	0,26
17	5,59	0,12
18	5,52	0,05
19	5,30	-0,17
20	5,18	-0,29

Κατανομή Gauss ή Κανονική κατανομή

Συμμετρική καμπύλη γύρω από το 0 σημαίνει ότι η μέτρηση υπόκειται σε **τυχαία σφάλματα**. Απόκλιση της συμμετρίας γύρω από το 0 σημαίνει είτε ότι η μέτρηση ήταν κακή. Αν υπεισέρχονται συστηματικά σφάλματα, η κεντρική τιμή θα απέχει από την «αληθινή τιμή».



ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS

Πληθυσμός: ένας πολύ μεγάλος αριθμός μετρήσεων που θα μπορούσαμε να έχουμε κάνει. Περιοριζόμαστε σε κανονικούς πληθυσμούς.

Η κατανομή *Gauss* ή κανονική κατανομή δίδεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(X - x)^2}{2\sigma^2} \right]$$

Το σ καθορίζει το εύρος της κατανομής και λαμβάνεται ως μέτρο του σφάλματος, X είναι η κεντρική τιμή (πραγματική τιμή).

ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS

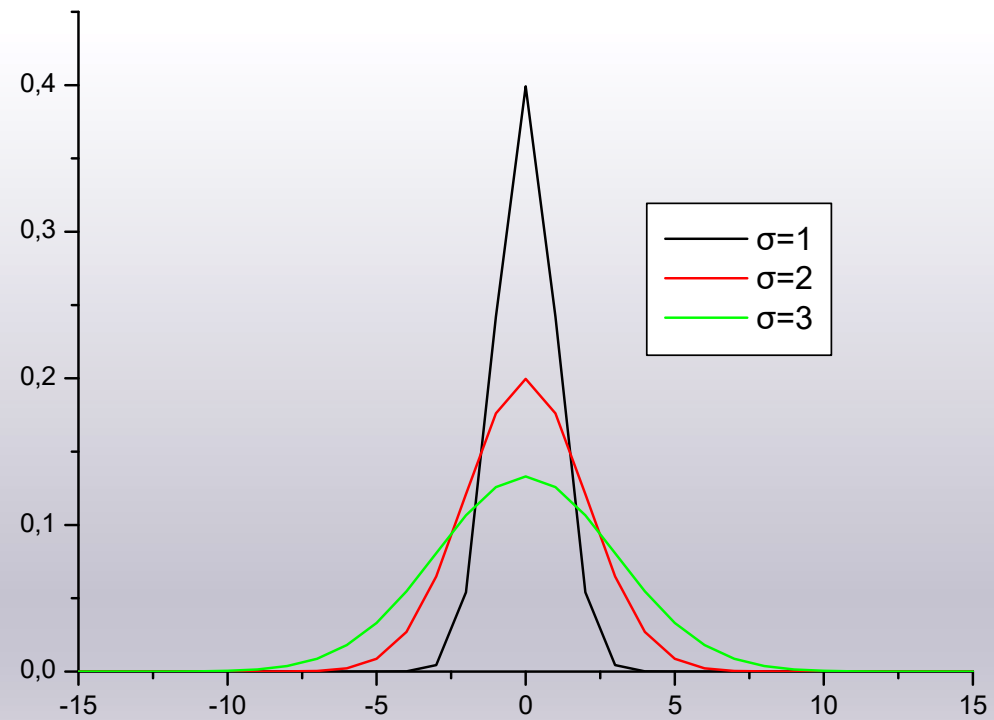
Τυπική απόκλιση της κατανομής

Έστω ότι ο πληθυσμός περιλαμβάνει N μετρήσεις όπου N ένας πολύ μεγάλος αριθμός.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_i - X)^2}{N}}$$

Το σ είναι ένα μέτρο της απόκλισης των μετρήσεων από την πραγματική τιμή.

KATANOMH GAUSS



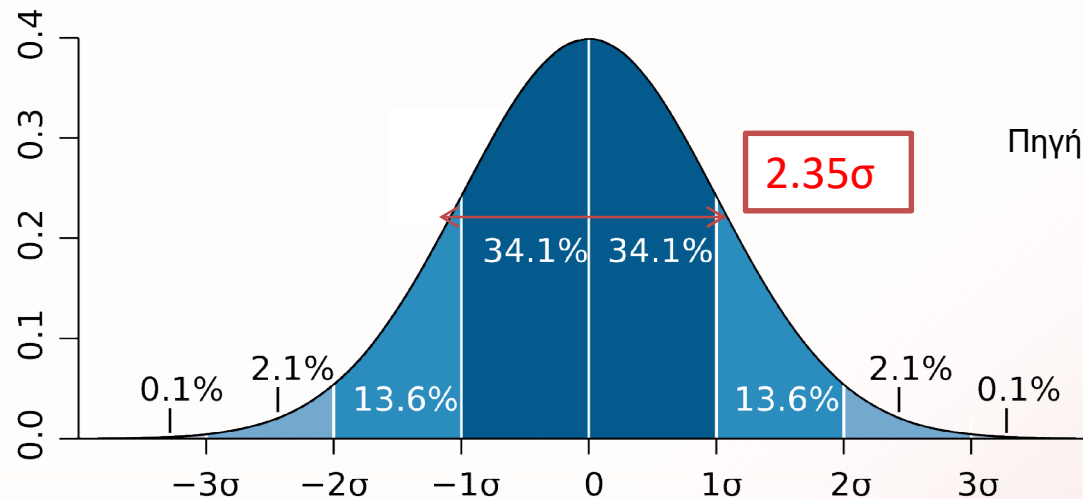
ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS

Σκοπός του πειράματος

Κάνουμε μια σειρά n μετρήσεων (δείγμα) με σκοπό να υπολογίσουμε τα $\bar{X}$, σ της κατανομής. Φυσικά $n \ll N$.

Αν δεν έχουμε συστηματικά σφάλματα, αποδεικνύεται ότι η πραγματική τιμή X προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη μέση τιμή των μετρήσεων $\bar{x}$ και το σ από την τυπική απόκλιση σ_x της σειράς των μετρήσεων που θα δούμε στη συνέχεια.

ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS



Πηγή: wikipedia από M.W. Toews

- Η πιθανότητα ώστε μια νέα μέτρηση x να βρίσκεται στο διάστημα $(-\sigma, +\sigma)$, είναι ίση με 68.3%
- Η πιθανότητα ώστε μια νέα μέτρηση x να βρίσκεται στο διάστημα $(-2\sigma, +2\sigma)$, είναι ίση με 95.4% και στο $(-3\sigma, +3\sigma)$ είναι 99.7%.
- Εύρος ημίσειας τιμής (FWHM)= 2.35σ

ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS

Είτε χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες τις μετρήσεις, είτε τις διαφορές τους από τη μέση τιμή η μορφή της καμπύλης είναι ίδια. Στην πρώτη περίπτωση, κεντρική τιμή είναι η μέση τιμή των μετρήσεων και στη δεύτερη περίπτωση το μηδέν.

Αν χρησιμοποιήσουμε τις διαφορές, εκφρασμένες σε μονάδες σ:

$$z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$$

τότε ονομάζεται **Τυπική Κανονική Κατανομή**. Προφανώς η τυπική κανονική κατανομή έχει $X=0$ και $\sigma=1$ και είναι η ίδια για κάθε πρόβλημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.1) Μετρήσαμε πολλές φορές ένα μέγεθος και συμπεράναμε ότι η μέτρηση ακολουθεί την κανονική κατανομή με $\chi=17$ και $\sigma=1$ (στις κατάλληλες μονάδες). Αν κάνουμε μια σειρά μετρήσεων, ποιο κλάσμα των μετρήσεών μας αναμένεται να είναι στο διάστημα: α) (16,18), β) (15,18), γ) (17, 19), δ) (14,16), ε) (16,20), στ) (18, ∞).

3.2) Να αποδείξετε ότι το FWHM της κανονικής κατανομής είναι ίσο με 2.35σ .

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Για n μετρήσεις $x_1, x_2, \dots, x_n$ του ίδιου μεγέθους, τα σ και X προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$\sigma = \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (\bar{X} - x_i)^2}{n - 1}} \quad \text{και} \quad X = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$$

Το σ_x ονομάζεται **τυπική απόκλιση της σειράς** των μετρήσεων – Εξαρτάται από την ποιότητα και ελάχιστα από το πλήθος n των μετρήσεων!

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

- Εκτελούμε πολλές σειρές n το πλήθος μετρήσεων σε **ίδιες συνθήκες**. Βρίσκουμε διαφορετικές μέσες τιμές. Σχηματίζεται η κατανομή των μέσων τιμών
- Ορίζουμε επίσης την **τυπική απόκλιση της μέσης τιμής** των μετρήσεων. Εκφράζει το διάστημα μέσα στο οποίο βρίσκεται με μεγάλη πιθανότητα η μέση τιμή. Εξαρτάται από το πλήθος n των μετρήσεων:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum (\bar{X} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

Άρα σε μια σειρά n μετρήσεων:

- Η πιο αξιόπιστη τιμή είναι η μέση τιμή: $\bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}$
- Κάθε μέτρηση x_i παρουσιάζει απόκλιση από τη

μέση τιμή: $\varepsilon_i = x_i - \bar{X}$

- Η σειρά των n μετρήσεων χαρακτηρίζεται από την τυπική απόκλιση:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum (\bar{X} - x_i)^2}{n - 1}}$$

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

- Η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής είναι ίση με:

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum(\bar{X} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

και το τελικό αποτέλεσμα θα εκφράζεται από την:

$$\bar{X} \pm \sigma_{\bar{X}} =$$

- Το σχετικό σφάλμα (ή η % απόκλιση) της μέσης τιμής, προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\frac{\sigma_{\bar{X}}}{\bar{X}} \times 100\% =$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

3.3) Μετρήσαμε 10 φορές ένα μήκος X και πήραμε τις παρακάτω τιμές σε cm: 5.0, 5.4, 4.8, 5.6, 5.1, 4.4, 4.9, 5.2, 4.6, 5.4

Να βρεθούν: η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση των μετρήσεων, η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής και το σχετικό σφάλμα.

A/A	x_i	$\bar{x}$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
$\sum_{i=1}^{10} x_i =$		$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 =$		

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Οι παραδόσεις αυτές βασίζονται στις παραδόσεις της Καθηγήτριας κ. Γεωργιά και του Καθηγητή κ. Κροντηρά.

Επίσης χρησιμοποιήθηκαν:

- [1] Καμαράτος Μ., Εισαγωγή στην Ανάλυση Πειραματικών Μετρήσεων, Κλειδάριθμος 2019.
- [2] Σάλτας Β., Εργαστηριακός Οδηγός Φυσικής, ΣΕΑΒ 2015.
- [3] Taylor J., An Introduction to Error Analysis, University Science Books 1997.
- [4] Μαθιουλάκης Μ., Μέτρηση, Ποιότητα Μέτρησης και Αβεβαιότητα, Ελληνική ένωση Εργαστηρίων 2004.