ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι

ΘΕΩΡΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Ενότητα 6: Η Μέθοδος των Ελαχίστων Τετραγώνων.

Τμήμα Φυσικής

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Άδειες Χρήσης

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό υπόκειται σε άδειες χρήσης Creative Commons.
- Για εκπαιδευτικό υλικό, όπως εικόνες, που υπόκειται σε άλλου τύπου άδειας χρήσης, η άδεια χρήσης αναφέρεται ρητώς.

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο την αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Η ΜΕΘΟΔΟΣ ΤΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

- Γενικά σε μια σειρά *N* μετρήσεων (x_i, y_i) προσπαθούμε να βρούμε τις παραμέτρους μιας πρότυπης σχέσης $y = f(x)$, η οποία θεωρούμε ότι περιγράφει τις πειραματικές μας μετρήσεις! Η διαδικασία αυτή ονομάζεται Ανάλυση Παλινδρόμησης (Regression) και γίνεται με τη ***Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων (ΜΕΤ).***
- Βασικές προϋποθέσεις για την εφαρμογή της ΜΕΤ είναι:

➢Το σφάλμα της ανεξάρτητης μεταβλητής x_i είναι αμελητέο.

➢Όλα τα y_i βαρύνονται με το ίδιο τυχαίο σφάλμα, το οποίο ακολουθεί την κανονική κατανομή Gauss.

- Οι παράμετροι προσδιορίζονται με ελαχιστοποίηση του αθροίσματος S των τετραγώνων των αποκλίσεων:

$$S = \sum \left(y_i - f(x_i)\right)^2$$

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

- Η γνωστότερη περίπτωση εφαρμογής της μεθόδου είναι η περίπτωση όπου η σχέση που συνδέει τα x_i και y_i είναι γραμμική, δηλ. $f(x) = Ax + B$

- Είναι φανερό ότι σε διάγραμμα όπου έχουν τοποθετηθεί τα πειραματικά ζεύγη τιμών (x_i, y_i) , μπορούν να χαραχθούν "άπειρες" ευθείες οι οποίες να διέρχονται ανάμεσα από τα πειραματικά σημεία.

➢ Με τη ΜΕΤ υπολογίζονται οι σταθερές $A \pm \delta A$ και $B \pm \delta B$ για τη χάραξη της ***βέλτιστης-άριστης ευθείας***, δηλ. της ευθείας για την οποία το άθροισμα:

$$S = \sum (y_i - Ax_i - B)^2$$

γίνεται ελάχιστο!

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Εξίσωση ευθείας: y=Ax+B

Ζητάω το:

$$S = \sum (y_i - Ax_i - B)^2 = min$$

Δηλαδή:

$$\frac{\partial S}{\partial A} = 0 \quad \kappa\alpha\iota \quad \frac{\partial S}{\partial B} = 0$$

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Τελικά, από τους υπολογισμούς προκύπτει:

$$A = \frac{N\left(\sum x_i y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum y_i\right)}{N\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}$$

και:

$$B = \frac{\left(\sum x_i^2\right)\left(\sum y_i\right) - \left(\sum x_i\right)\left(\sum x_i y_i\right)}{N\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}$$

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Ο υπολογισμός των σφαλμάτων δίνει:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - Ax_i - B)^2}{N-2}}$$

και

$$\delta A = \sigma_A = \sqrt{\frac{N\sigma_y^2}{N\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

$$\delta B = \sigma_B = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 \sum x_i^2}{N\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}}$$

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

- Οι τιμές y_i δεν είναι Ν μετρήσεις της ίδιας ποσότητας. Αντιστοιχούν σε διαφορετική τιμή της μεταβλητής x.
- Υποθέτουμε ότι κάθε y_i είναι κανονικά κατανεμημένο γύρω από την «αληθινή τιμή» Ax_i+B.

Το σ_y είναι η καλύτερη εκτίμηση της αβεβαιότητας των μετρήσεων y_i. Ο παρονομαστής Ν-2 προκύπτει από τη θεωρία πιθανοτήτων.

- Μπορεί να δικαιολογηθεί ως εξής:

Αν έχω μόνο δύο ζευγάρια μετρήσεων τότε ο αριθμητής θα είναι μηδέν γιατί δύο σημεία ορίζουν μια ευθεία.
Με Ν-2 στον παρονομαστή θα είναι μηδέν και ο παρονομαστής εκφράζοντας το γεγονός ότι η αβεβαιότητα δεν μπορεί να υπολογιστεί με μόνο δύο μετρήσεις.

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

- Οι τύποι που δίνουν τις αβεβαιότητες δΑ και δΒ προκύπτουν από διάδοση σφάλματος θεωρώντας ότι τα Α, Β είναι συναρτήσεις των μεταβλητών y_i i=1,…,N. Η αβεβαιότητα κάθε μεταβλητής y_i είναι ίση με σ_y. Οι τιμές x_i και συνεπώς και το Δ δεν έχουν αβεβαιότητα.
- Για παράδειγμα:

$$\frac{\partial A}{\partial y_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} {x_i}^2 \cdot 1 - x_i \sum_{i=1}^{N} x_i}{\Delta}$$

Η απόδειξη των τύπων αφήνεται σαν άσκηση.

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Εφαρμογή:

Μετρήθηκε η περίοδος T ενός απλού μαθηματικού εκκρεμούς, για 8 διαφορετικά μήκη. Με εφαρμογή της μεθόδου των ελαχίστων τετραγώνων (ΜΕΤ) να υπολογισθεί η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας.

Επειδή: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ ή $T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L$

Για την εφαρμογή της ΜΕΤ έχω:

$$x_i \rightarrow L \quad \kappa\alpha\iota \quad y_i \rightarrow T^2$$

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Εφαρμογή ***(συνέχεια)***

x_i	y_i	x_i^2	x_iy_i	y_i-Ax_i-B	$(y_i-Ax_i-B)^2$
L (m)	**T^2 (s^2)**	**L^2 (m^2)**	**L T^2 (ms^2)**	**s^2**	**$x10^{-4}$ s^4**
0.262	1.10	0.0688	0.2882	+0.0264	6.970
0.303	1.17	0.0918	0.3545	-0.0663	43.962
0.428	1.80	0.1832	0.7704	+0.0677	45.833
0.513	1.98	0.2632	1.0055	-0.1096	120.121
0.650	2.72	0.4225	1.7680	+0.1068	114.082
0.734	2.89	0.5388	2.1213	-0.0585	31.922
0.802	3.35	0.6432	2.6867	+0.1337	178.756
0.927	3.61	0.8593	3.3465	-0.1023	104.652
$\Sigma x_i =$ 4.619m	$\Sigma y_i =$ 18.80s^2	$\Sigma x_i^2 =$ 3.0706m^2	$\Sigma x_iy_i =$ 12.3411ms^2		$\Sigma(y_i-Ax_i-B)^2 =$ 646.278 $x10^{-4}s^4$
$(\Sigma x_i)^2$=21.3352m^2					

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Συμβολίζω με Δ τον κοινό παρανομαστή των σχέσεων που δίνουν τις τιμές των A, B και των σφαλμάτων τους δA και δB:

$$\Delta = N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2$$

Αντικαθιστώντας, προκύπτει:

$$\Delta = (8 * 3.0706 - 21.3352)m^2 = 3.2296m^2$$

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Οπότε για τις τιμές των A και B έχουμε:

$$A = \frac{N(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{N\left(\sum x_i^2\right) - (\sum x_i)^2}$$

$$= \frac{8x12.3411 - 4.619x18.80}{3.2296}$$

$$= 3.9681075\ s^2 m^{-1}$$

$$B = \frac{\left(\sum x_i^2\right)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{N\left(\sum x_i^2\right) - (\sum x_i)^2}$$

$$= \frac{3.0706x18.80 - 4.619x12.3411}{3.2296}$$

$$= 0.0339422\ s^2$$

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Δηλαδή: $y = 3.968x + 0.0339$

Για να υπολογίσουμε τα σφάλματα, υπολογίζουμε αρχικά την ποσότητα σ_y:

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum(y_i - Ax_i - B)^2}{N-2}} = \sqrt{\frac{648.278x10^{-4}}{8-2}}$$

$$= \sqrt{0.0107713\ s^2} = 0.1038s^2$$

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Οπότε:

$$\delta A = \sigma_A = \sqrt{\frac{N\sigma_y^2}{N\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}} = \sigma_y\sqrt{\frac{N}{\Delta}}$$

$$= 0.1038\sqrt{\frac{8}{3.2296}}\ \ s^2 m^{-1}$$

$$= 0.163370 s^2 m^{-1} \sim 0.2\ s^2 m^{-1}$$

$$A \pm \delta A = (3.9681075 \pm 0.2) s^2 m^{-1}$$

$$= (4.0 \pm 0.2)\ s^2 m^{-1}$$

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

$$\delta B = \sigma_B = \sqrt{\frac{\sigma_y^2 \sum x_i^2}{N\left(\sum x_i^2\right) - \left(\sum x_i\right)^2}} = \sigma_y \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{\Delta}}$$

$$= 0.1038 \sqrt{\frac{3.0708}{3.2296}}\ s^2 = 0.1012 s^2 \sim 0.1 s^2$$

$$B \pm \delta B = (0.0339422 \pm 0.1) s^2 = (0.0 \pm 0.1)\ s^2$$

Άρα τελικά:

$$\boldsymbol{T^2 = 4.0L}$$

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

$$A = κλίση = \frac{4\pi^2}{g} \quad ή \quad g = \frac{4\pi^2}{A} = \frac{4(3.14)^2}{4.0} ms^{-2}$$

$$= 9.87 ms^{-2}$$

$$\delta g = \left| \frac{\partial g}{\partial A} \delta A \right| = \left| \frac{-4\pi^2}{A^2} \delta A \right| = \frac{4 \cdot 9.87}{16} \cdot 0.2 = 0.49 \approx 0.5 \frac{m}{s^2}$$

$$g \pm \delta g = (9.9 \pm 0.5) \frac{m}{s^2}$$

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

- Για την πραγματοποίηση του διαγράμματος, αφού επιλέξω κατάλληλα τους άξονες, τοποθετώ τα πειραματικά σημεία **(μπλε σταυροί στο διάγραμμα που ακολουθεί)**.
- Όπως προέκυψε από τους υπολογισμούς ισχύει:

$$T^2 = 4.0L$$

Οπότε για τη χάραξη της βέλτιστης ευθείας αρκεί για δύο τιμές L_1 και L_2 να υπολογίσω τις αντίστοιχες τιμές του T^2. Τοποθετώ τα δυο ζεύγη τιμών στο διάγραμμα **(πράσινοι αστερίσκοι στο διάγραμμα που ακολουθεί)** και χαράζω τη βέλτιστη ευθεία, η οποία είναι η ευθεία που ενώνει αυτά τα δύο σημεία **(κόκκινη ευθεία).**

ΕΛΑΧΙΣΤΑ ΤΕΤΡΑΓΩΝΑ

Αφού $T^2=4.0L$ προκύπτει ότι

Για $L_1=0.4m$ προκύπτει $T_1^{\,2}=1.6s^2$

Για $L_2=0.9m$ προκύπτει $T_1^{\,2}=3.6s^2$