ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι

ΘΕΩΡΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Ενότητα 4: Τρόποι έκφρασης σφάλματος-

Ορθός τρόπος γραφής αποτελεσμάτων-

Διάδοση σφαλμάτων

Τρόποι έκφρασης των Σφαλμάτων

- ***Απόλυτο σφάλμα:***

➢ αποτελεί *μέτρο της αξιοπιστίας* των μετρήσεων:

$$X = x \pm \delta x$$

Το απόλυτο σφάλμα είναι φυσικό μέγεθος και έχει τις ίδιες μονάδες με το μετρούμενο!

- ***Σχετικό σφάλμα*** (συνήθως εκφράζεται επί τοις εκατό (%))

➢ εκφράζει την *ποιότητα* των μετρήσεων:

$$\text{Σχετικό Σφάλμα} = \frac{\delta x}{X} 100\%$$

Το σχετικό σφάλμα (σε αντίθεση με το απόλυτο) είναι καθαρός αριθμός!

❖ ***Και τα δυο εκφράζουν με διαφορετικούς τρόπους την ίδια ακριβώς αβεβαιότητα***

Ορθός Τρόπος γραφής των Αποτελεσμάτων

- Εφόσον η Μέση Τιμή θεωρείται ότι είναι πιο ακριβής από τις επιμέρους μετρήσεις, ***η Μέση Τιμή*** μιας σειράς μετρήσεων γράφεται **ΠΑΝΤΑ** με ***ένα σημαντικό ψηφίο περισσότερο*** από τις άλλες μετρήσεις! Με αυτόν τον τρόπο δείχνουμε ότι αποδίδουμε στη μέση τιμή μεγαλύτερη εμπιστοσύνη από την κάθε επιμέρους μέτρηση!
- Αφού τ***ο σφάλμα δx,*** σχετίζεται με την αβεβαιότητα που βαρύνει την τιμή ενός φυσικού μεγέθους και δίνει μια προσεγγιστική τιμή της αβεβαιότητας αυτής, δεν μπορεί να έχει πολλά σημαντικά ψηφία: Για μετρήσεις στο φοιτητικό εργαστήριο η τιμή του σφάλματος στρογγυλοποιείται ώστε να έχει μόνο ***ΕΝΑ*** σημαντικό ψηφίο!

- Μερικές φορές, για μετρήσεις πολύ μεγάλης ακρίβειας το σφάλμα μπορεί να γραφεί και με δύο σημαντικά ψηφία.

Ορθός Τρόπος γραφής των Αποτελεσμάτων

- Στο ***τελικό αποτέλεσμα:*** $\bar{\mathbf{x}} \pm \boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{x}}$

  η μέση τιμή $\bar{\mathbf{x}}$ στρογγυλοποιείται και γράφεται με τόσα σημαντικά ψηφία ώστε ***το τελευταίο ψηφίο να είναι στην ίδια θέση*** όπου εμφανίζεται το σημαντικό ψηφίο στο σφάλμα $\boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{x}}$!

- ***Παράδειγμα 1ο*** : Έστω ότι από μια σειρά μετρήσεων προκύπτει για μια δύναμη η μέση τιμή $\bar{\mathrm{F}} = 23{,}1675\ \mathrm{N}$

  και μετά από υπολογισμούς προκύπτει τυπική απόκλιση της μέσης τιμής ίση με $\delta\bar{\mathrm{F}} = 0{,}07235\mathrm{N}$

- Στρογγυλοποιούμε το σφάλμα ώστε να έχει ΈΝΑ σημαντικό:

  $\delta\bar{\mathrm{F}} = 0{,}07\mathrm{N}$ $\mathrm{OXI}\ 0{,}1\mathrm{N}$

- Το τελικό αποτέλεσμα θα γραφεί με όσα *ΔΕΚΑΔΙΚΑ* έχει το σφάλμα, δηλαδή: $\bar{\mathrm{F}} \pm \delta\bar{\mathrm{F}} = (23{,}17 \pm 0{,}07)\mathrm{N}$

Ορθός Τρόπος γραφής των Αποτελεσμάτων

- ***Παράδειγμα 2ο***

Αν προκύψει π.χ. D= 98735,35m

και δD=263m

- Τότε, στρογγυλοποιώ και γράφω το σφάλμα με ΕΝΑ σημαντικό ψηφίο, δηλαδή:

  $\delta D=3x10^2$ m **(το 300 m έχει 3 Σ.Ψ.!!)**

  και: $$D \pm \delta D = (987 \pm 3) * 10^2 \mathrm{m}$$

Ορθός Τρόπος γραφής των Αποτελεσμάτων

Παράδειγμα 3ο

Μετρήθηκε - οκτώ φορές - το μήκος ενός μολυβιού, Τα αποτελέσματα των μετρήσεων φαίνονται στον Πίνακα. Να υπολογισθεί η Μέση Τιμή, η τυπική της απόκλιση, καθώς και το σχετικό σφάλμα.

$\alpha(\mathrm{cm})$	$\bar{\alpha}(\mathrm{cm})$	$\alpha-\bar{\alpha}$ $(\times 10^{-2}\mathrm{cm})$	$(\alpha-\bar{\alpha})^2$ $(\times 10^{-4}\mathrm{cm}^2)$
12,31		-4,1	16,81
12,35		-0,1	0,01
12,33		-2,1	4,41
12,39	12,35125	+3,9	15,21
12,32	**12,351**	-3,1	9,61
12,37		+1,9	3,61
12,38		+2,9	8,41
12,36		+0,9	0,81
$\sum(\alpha-\bar{\alpha})^2 = 58,88x10^{-4}\,cm^2$			

- Από τους υπολογισμούς προκύπτει για τη μέση τιμή: $\bar{\alpha} = 12{,}35125cm$

Η μ.τ. όμως γράφεται με ένα σημαντικό ***περισσότερο*** από τις άλλες μετρήσεις, άρα:

$$\boldsymbol{\bar{a} = 12,351cm}$$

Ορθός Τρόπος γραφής των Αποτελεσμάτων

Παράδειγμα 3^ο^ (συνέχεια)

- Υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση της Μέσης Τιμής από τη σχέση:

$$\delta\bar{\alpha} = \pm\sqrt{\frac{\sum(\alpha-\bar{\alpha})^2}{N(N-1)}}$$

- Από τις πράξεις προκύπτει: $\delta\bar{\alpha}$ =1,025 x10^{-2} cm

Επειδή όμως το σφάλμα γράφεται με **ΕΝΑ σημαντικό ψηφίο**,

$\delta\bar{\alpha}$ **=0,01cm**

και

$\bar{\alpha} \pm \delta\bar{\alpha}$ **= (12,35 ± 0,01) cm**

Διάδοση Σφάλματος

- Έστω ότι υπολογίζουμε την τιμή ενός μεγέθους **f**, από τις τιμές **x, y, z** που έχουν προκύψει από άμεσες μετρήσεις.

Δηλαδή:

$$\boxed{\mathbf{f = f(x,y,z)}}$$

Προφανώς το σφάλμα του **f** θα εξαρτάται από τα σφάλματα στις μετρήσεις των **x, y, z** !

Διάδοση Σφάλματος

- Αν κάθε μια από τις άμεσες μετρήσεις ***x, y, z*** βαρύνεται από <u>**τυχαία και ανεξάρτητα**</u> μεταξύ τους σφάλματα: ***δx, δy, δz***:

$$x \pm \delta x \quad y \pm \delta y \quad z \pm \delta z$$

τότε αποδεικνύεται ότι η αβεβαιότητα που βαρύνει την ***f*** δίνεται από τη σχέση:

$$\delta f = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\delta z\right)^2}$$

Διάδοση Σφάλματος-Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο

Δύο αντιστάσεις R_1 *και* R_2 μετρήθηκαν, από 10 φορές η κάθε μια και προέκυψαν οι παρακάτω τιμές:

$$\bar{R}_1 \pm \delta\bar{R}_1 = (10.7 \pm 0.2)\Omega$$

$$\bar{R}_2 \pm \delta\bar{R}_2 = (26.5 \pm 0.5)\Omega$$

Να υπολογισθεί η ολική αντίσταση καθώς και η τυπική της απόκλιση, στην περίπτωση που οι αντιστάσεις είναι συνδεδεμένες παράλληλα.

Διάδοση Σφάλματος-Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο (συνέχεια)

Αν $\mathrm{R}_{\text{ολ}}$ η ολική αντίσταση, τότε:

$$\frac{1}{R_{ο\lambda}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \qquad \text{ή} \qquad R_{ο\lambda} = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές των R_1 και R_2 προκύπτει:

$$R_{ο\lambda} = \frac{10.7 * 26.5}{10.7 + 26.5}\Omega = 7.62\Omega$$

Διάδοση Σφάλματος-Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο (συνέχεια)

Για τον υπολογισμό του σφάλματος θα χρησιμοποιήσουμε

το ***νόμο διάδοσης των σφαλμάτων***:

$$\delta R_{o\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_{o\lambda}}{\partial R_1}\delta R_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R_{o\lambda}}{\partial R_2}\delta R_2\right)^2}$$

- Υπολογίζουμε καταρχάς τις μερικές παραγώγους:

$$\frac{\partial R_{o\lambda}}{\partial R_1} \quad \text{και} \quad \frac{\partial R_{o\lambda}}{\partial R_2}$$

Διάδοση Σφάλματος-Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο (συνέχεια)

Από την παραγώγιση προκύπτει:

$$\frac{\partial R_{o\lambda}}{\partial R_1} = \frac{{R_2}^2}{(R_1 + R_2)^2} \quad \text{και} \quad \frac{\partial R_{o\lambda}}{\partial R_2} = \frac{{R_1}^2}{(R_1 + R_2)^2}$$

Με δεδομένες τις αριθμητικές τιμές των R_1 και R_2, αντικαθιστώντας προκύπτει:

$$\frac{\vartheta R_{o\lambda}}{\vartheta R_1} = 0.507 \quad \text{και} \quad \frac{\vartheta R_{o\lambda}}{\vartheta R_2} = 0.0827$$

Διάδοση Σφάλματος-Παραδείγματα

Παράδειγμα 1ο (συνέχεια)

- Τελικά, αφού γνωρίζουμε ότι: $\delta\overline{R_1} = \pm 0.2\Omega$ και $\delta\overline{R_2} = \pm 0.5\Omega$

υπολογίζουμε την τυπική απόκλιση αντικαθιστώντας στη σχέση:

$$\delta R_{o\lambda} = \sqrt{\left(\frac{\partial R_{o\lambda}}{\partial R_1}\delta R_1\right)^2 + \left(\frac{\partial R_{o\lambda}}{\partial R_2}\delta R_2\right)^2}$$

$$\delta R_{o\lambda} = \sqrt{(0.507 * 0.2)^2 + (0.0827 * 0.5)^2}$$
$$= 0{,}10959\Omega \approx 0.1\Omega$$

και επειδή $R_{o\lambda} = 7.62\Omega$

- Τελικά γράφουμε:

$$R_{o\lambda} \pm \delta R_{o\lambda} = (7.6 \pm 0.1)\Omega$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.1) Θέλουμε να μετρήσουμε την περίοδο ενός εκκρεμούς. Γνωρίζουμε ότι η αβεβαιότητα στις μετρήσεις του χρόνου (με δεδομένο ψηφιακό χρονόμετρο και δεδομένες δυνατότητες παρατηρητή) είναι 0.1 s.

α) Μετράμε τον χρόνο 10 περιόδων και βρίσκουμε: 5.4±0.1. Να υπολογίσετε την περίοδο, την απόλυτη και την σχετική της αβεβαιότητα.

β) Να εξηγήσετε μέσω της διάδοσης σφάλματος τι πετυχαίνουμε μετρώντας πολλές περιόδους αντί για μία. Μπορούμε να αυξήσουμε απεριόριστα τον αριθμό περιόδων ώστε να το εκμεταλλευτούμε όσο γίνεται;

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

4.2) Θέλουμε να μετρήσουμε την πυκνότητα ενός υλικού. Έχουμε στην διάθεσή μας ένα σώμα κυλινδρικού σχήματος φτιαγμένο από το υλικό αυτό. Πήραμε μετρήσεις της μάζας, της διαμέτρου και του ύψους του σώματος:

$m \pm \delta m = (420 \pm 1)$ g, $d \pm \delta d = (3.9 \pm 0.1)$ cm, $\upsilon \pm \delta\upsilon = (5.2 \pm 0.1)$ cm

Να υπολογίσετε την τιμή και την αβεβαιότητα της πυκνότητας.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Οι παραδόσεις αυτές βασίζονται στις παραδόσεις της Καθηγήτριας κ. Γεωργά και του Καθηγητή κ. Κροντηρά.

Επίσης χρησιμοποιήθηκαν:

- [1] Καμαράτος Μ., Εισαγωγή στην Ανάλυση Πειραματικών Μετρήσεων, Κλειδάριθμος 2019.
- [2] Σάλτας Β., Εργαστηριακός Οδηγός Φυσικής, ΣΕΑΒ 2015.
- [3] Taylor J., An Introduction to Error Analysis, University Science Books 1997.
- [4] Μαθιουλάκης Μ., Μέτρηση, Ποιότητα Μέτρησης και Αβεβαιότητα, Ελληνική Ένωση Εργαστηρίων 2004.