ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ
UNIVERSITY OF PATRAS

ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ Ι

ΘΕΩΡΙΑ ΣΦΑΛΜΑΤΩΝ

Ενότητα 3: Κατανομή Gauss

Μέση τιμή & Τυπική απόκλιση

ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS

- Σύμφωνα με τη στατιστική κατανομή αν ένα φαινόμενο είναι πράγματι τυχαίο, τότε η οριακή κατανομή που θα προκύψει μετά από άπειρες προσπάθειες θα είναι **η κανονική κατανομή ή κατανομή Gauss**.
- Η κατανομή Gauss είναι η πιο κοινή κατανομή στην θεωρία πιθανοτήτων:

  Εάν επαναλάβουμε ένα πείραμα πολλές φορές (...άπειρες...) τότε το αποτέλεσμα περιγράφεται από τη συμμετρική καμπύλη (-κώδωνας-) Gauss.

KATANOMH GAUSS

N	R(KΩ
1	5,75
2	6,50
3	5,94
4	5,16
5	4,96
6	5,84
7	5,14
8	5,51
9	5,71
10	4,98
11	5,61
12	4,50
13	5,54
14	5,70
15	5,41
16	5,73
17	5,59
18	5,52
19	5,30
20	5,18

Ιστόγραμμα – Πολύγωνο συχνοτήτων

Μέτρηση της αντίστασης ενός αντιστάτη

Οι μετρήσεις κατανέμονται στο διάστημα μεταξύ
4,5 ΚΩ και 6,5 ΚΩ

Μέση τιμή : $\overline{\mathrm{R}} = 5.470\mathrm{K\Omega}$

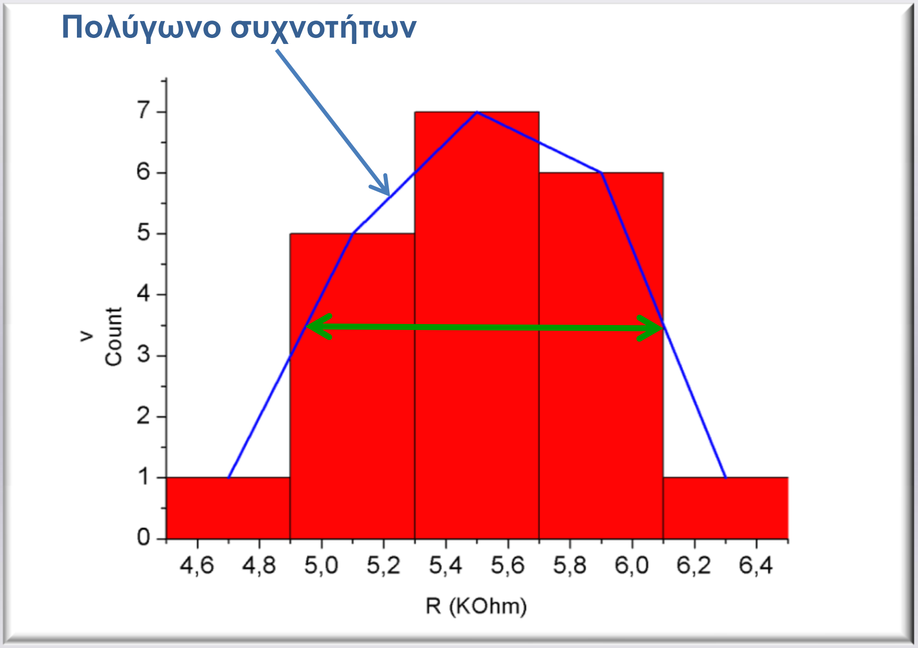
Εύρος τιμών: 6,5 – 4,5 = 2 ΚΩ
Κλάσεις = κ = 1 +3,3log(N) = 5
Στρογγυλοποιείται στον κοντινότερο ακέραιο
Πλάτος κλάσης = 2/5 = 0,4 ΚΩ

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ	
Αντίσταση (ΚΩ)	ν
4,5 – 4,9	1
4,9 – 5,3	5
5,3 – 5,7	7
5,7 – 6,1	6
6,1 – 6,5	1

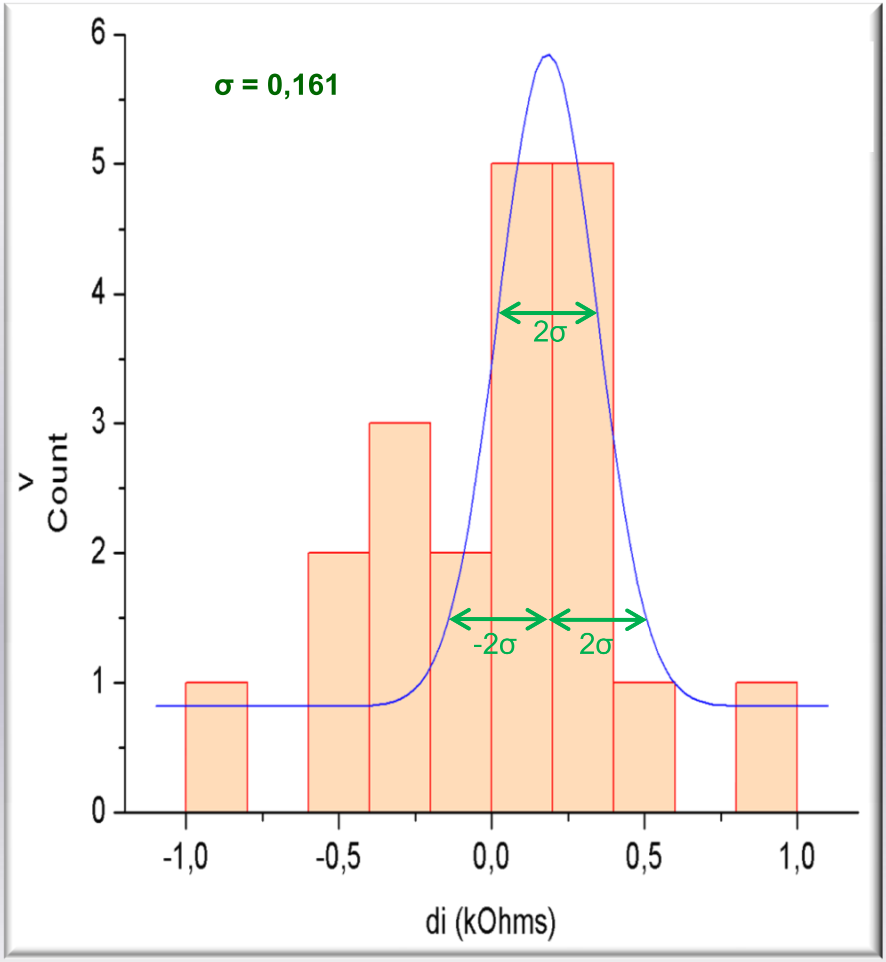
ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS

Ιστόγραμμα –Πολύγωνο Συχνοτήτων

ΠΙΝΑΚΑΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ	
Αντίσταση (ΚΩ)	ν
4,5 – 4,9	1
4,9 – 5,3	5
5,3 – 5,7	7
5,7 – 6,1	6
6,1 – 6,5	1



KATANOMH GAUSS



Το εύρος των διαστημάτων σε ένα ιστόγραμμα πρέπει να μην είναι: ***ούτε πολύ μεγάλο*** [διότι τότε μεγάλο πλήθος των μετρήσεων θα περιλαμβάνεται σε ένα μόνο διάστημα!],

ούτε πολύ μικρό [διότι τότε θα υπάρχουν διαστήματα τα οποία δεν θα περιέχουν καμία μέτρηση!],

με αποτέλεσμα το ιστόγραμμα να μη δίνει σωστές πληροφορίες….

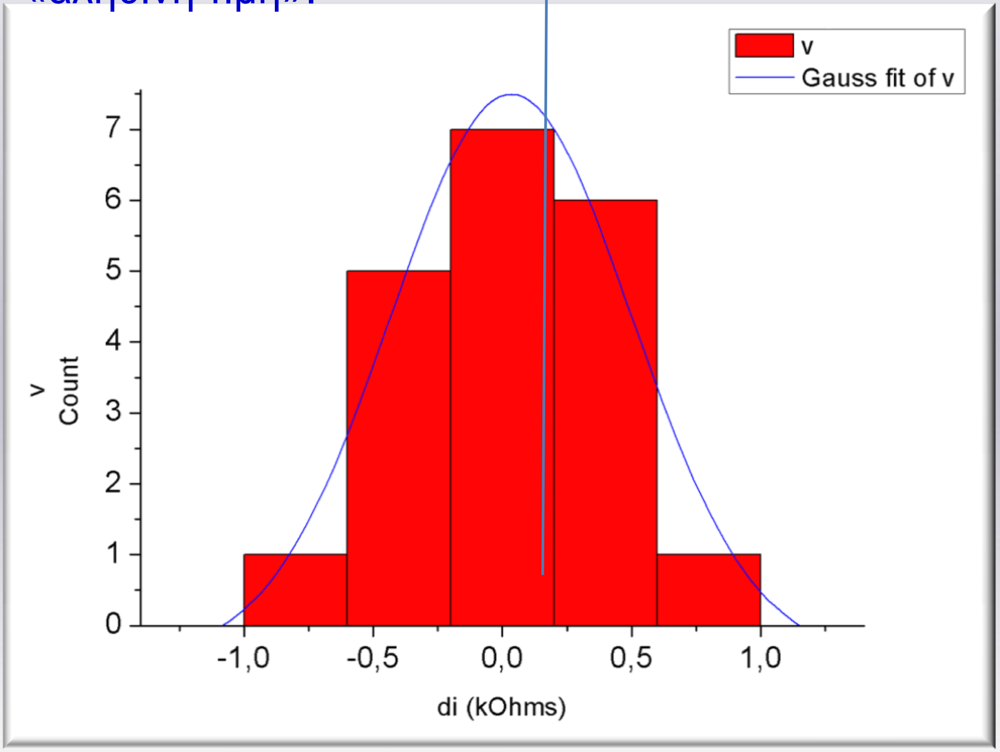
Αυξάνοντας το συνολικό πλήθος των μετρήσεων, έχουμε τη δυνατότητα να επιλέγουμε όλο και μικρότερα διαστήματα για την κατασκευή του ιστογράμματος!

ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS

N	R(ΚΩ)	$d_i = R_i - \overline{R}$ (ΚΩ)
1	5,75	0,28
2	6,41	0,94
3	5,94	0,47
4	5,16	-0,31
5	4,96	-0,51
6	5,84	0,37
7	5,14	-0,33
8	5,51	0,04
9	5,71	0,24
10	4,98	-0,49
11	5,61	0,14
12	4,50	-0,97
13	5,54	0,07
14	5,70	0,23
15	5,41	-0,06
16	5,73	0,26
17	5,59	0,12
18	5,52	0,05
19	5,30	-0,17
20	5,18	-0,29

Κατανομή Gauss ή Κανονική κατανομή

Συμμετρική καμπύλη γύρω από το 0 σημαίνει ότι η μέτρηση υπόκειται σε ***τυχαία σφάλματα***. Απόκλιση της συμμετρίας γύρω από το 0 σημαίνει είτε ότι η μέτρηση ήταν κακή. Αν υπεισέρχονται συστηματικά σφάλματα, η κεντρική τιμή θα απέχει από την «αληθινή τιμή».



ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS

Πληθυσμός ή Κατανομή: ένας πολύ μεγάλος αριθμός μετρήσεων που θα μπορούσαμε να έχουμε κάνει. Περιοριζόμαστε σε κανονικούς πληθυσμούς.

Η *κατανομή Gauss* ή *κανονική κατανομή* δίδεται από τη σχέση:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp\left[-\frac{(X-x)^2}{2\sigma^2}\right]$$

Το $\boldsymbol{\sigma}$ καθορίζει το εύρος της κατανομής και λαμβάνεται ως μέτρο του σφάλματος, **Χ** είναι η κεντρική τιμή (πραγματική τιμή).

ΚΑΤΑΝΟΜΗ GAUSS

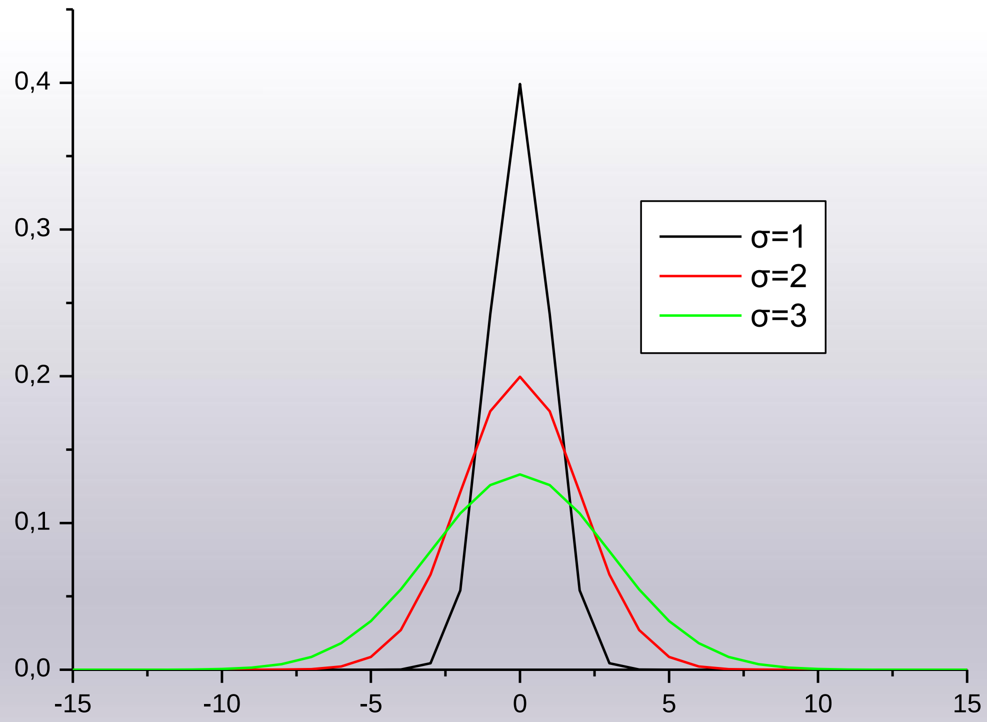
Τυπική απόκλιση της κατανομής

Έστω ότι ο πληθυσμός περιλαμβάνει Ν μετρήσεις όπου Ν ένας πολύ μεγάλος αριθμός.

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - X\right)^2}{N}}$$

Το ***σ*** είναι ένα μέτρο της απόκλισης των μετρήσεων από την πραγματική τιμή.

KATANOMH GAUSS



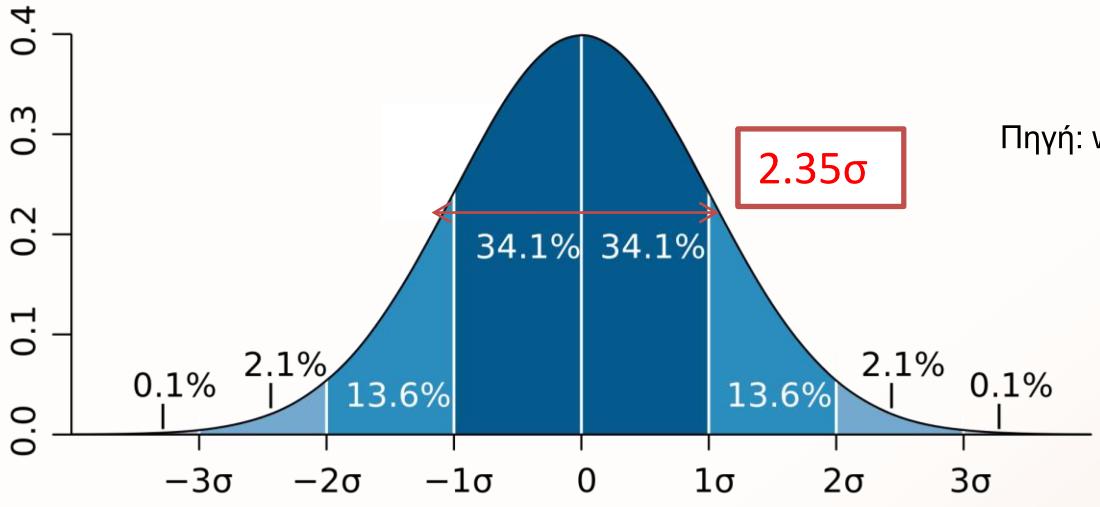
KATANOMH GAUSS

Σκοπός του πειράματος

Κάνουμε μια σειρά n μετρήσεων (δείγμα) με σκοπό να υπολογίσουμε τα X, σ της κατανομής. Φυσικά n<<N.

Αν δεν έχουμε συστηματικά σφάλματα, αποδεικνύεται ότι η πραγματική τιμή X προσεγγίζεται ικανοποιητικά από τη μέση τιμή των μετρήσεων $\bar{x}$ και το σ από την τυπική απόκλιση σ_x της σειράς των μετρήσεων που θα δούμε στη συνέχεια.

KATANOMH GAUSS



Πηγή: wikipedia από M.W. Toews

- Η πιθανότητα ώστε μια νέα μέτρηση x να βρίσκεται στο διάστημα (-σ,+σ), είναι ίση με 68.3%
- Η πιθανότητα ώστε μια νέα μέτρηση x να βρίσκεται στο διάστημα (-2σ,+2σ), είναι ίση με 95.4% και στο (-3σ,+3σ) είναι 99.7%.
- *Εύρος ημίσειας τιμής (FWHM)=2.35σ*

KATANOMH GAUSS

Είτε χρησιμοποιήσουμε τις ίδιες τις μετρήσεις, είτε τις διαφορές τους από τη μέση τιμή η μορφή της καμπύλης είναι ίδια. Στην πρώτη περίπτωση, κεντρική τιμή είναι η μέση τιμή των μετρήσεων και στη δεύτερη περίπτωση το μηδέν.

Αν χρησιμοποιήσουμε τις διαφορές, εκφρασμένες σε μονάδες σ: $z = \frac{x - \bar{x}}{\sigma}$
τότε ονομάζεται **Τυπική Κανονική Κατανομή**. Προφανώς η τυπική κανονική κατανομή έχει X=0 και σ=1 και είναι η ίδια για κάθε πρόβλημα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.1) Μετρήσαμε πολλές φορές ένα μέγεθος και συμπεράναμε ότι η μέτρηση ακολουθεί την κανονική κατανομή με $X=17$ και $\sigma=1$ (στις κατάλληλες μονάδες). Αν κάνουμε μια σειρά μετρήσεων, ποιο κλάσμα των μετρήσεών μας αναμένεται να είναι στο διάστημα: α) (16,18), β) (15,18), γ) (17, 19), δ) (14,16), ε) (16,20), στ) $(18,\infty)$.

2.2) Να αποδείξετε ότι το FWHM της κανονικής κατανομής είναι ίσο με 2.35σ.

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΜΕΤΡΗΣΕΩΝ

Για $\boldsymbol{n}$ μετρήσεις $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ του ίδιου μεγέθους, τα $\boldsymbol{\sigma}$ και ***X*** προσδιορίζονται από τις σχέσεις:

$$\boldsymbol{\sigma = \sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(\bar{X} - x_i)^2}{n-1}}} \quad \text{και} \quad \boldsymbol{X = \bar{X} = \frac{\sum x_i}{n}}$$

Το $\boldsymbol{\sigma_x}$ *ονομάζεται* ***τυπική απόκλιση της σειράς*** *των μετρήσεων – Εξαρτάται από την ποιότητα και ελάχιστα από το πλήθος* ***n*** *των μετρήσεων!*

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ ΤΗΣ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ

- *Εκτελούμε πολλές σειρές n το πλήθος μετρήσεων σε **ίδιες συνθήκες**. Βρίσκουμε διαφορετικές μέσες τιμές. Σχηματίζεται η κατανομή των μέσων τιμών*
- *Ορίζουμε επίσης την **τυπική απόκλιση της μέσης τιμής** των μετρήσεων. Εκφράζει το διάστημα μέσα στο οποίο βρίσκεται με μεγάλη πιθανότητα η μέση τιμή. Εξαρτάται από το πλήθος **n** των μετρήσεων:*

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{\sum(\bar{X} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

Άρα σε μια σειρά n μετρήσεων:

- Η πιο αξιόπιστη τιμή είναι η μέση τιμή: $\bar{X} = \dfrac{\sum x_i}{n}$
- Κάθε μέτρηση x_i παρουσιάζει απόκλιση από τη μέση τιμή: $\varepsilon_i = x_i - \bar{X}$
- Η σειρά των n μετρήσεων χαρακτηρίζεται από την τυπική απόκλιση:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum(\bar{X} - x_i)^2}{n-1}}$$

ΤΥΠΙΚΗ ΑΠΟΚΛΙΣΗ

- Η ***τυπική απόκλιση της μέσης τιμής*** **είναι ίση με:**

$$\sigma_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{\sum(\overline{X} - x_i)^2}{n(n-1)}}$$

και το τελικό αποτέλεσμα θα εκφράζεται από την:

$$\overline{X} \pm \sigma_{\overline{X}} =$$

- **Το *σχετικό σφάλμα* (ή η *% απόκλιση*) της μέσης τιμής, προσδιορίζεται από τη σχέση:**

$$\frac{\sigma_{\overline{X}}}{\overline{X}} \times 100\% =$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

2.3)Μετρήσαμε 10 φορές ένα μήκος Χ και πήραμε τις παρακάτω τιμές σε cm: 5.0, 5.4, 4.8, 5.6, 5.1, 4.4, 4.9, 5.2, 4.6, 5.4

Να βρεθούν: η μέση τιμή, η τυπική απόκλιση των μετρήσεων, η τυπική απόκλιση της μέσης τιμής και το σχετικό σφάλμα.

Α/Α	x_i	$\bar{x}$	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
$\sum_{i=1}^{10} x_i =$			$\sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 =$	

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

Οι παραδόσεις αυτές βασίζονται στις παραδόσεις της Καθηγήτριας κ. Γεωργά και του Καθηγητή κ. Κροντηρά.

Επίσης χρησιμοποιήθηκαν:

[1] Καμαράτος Μ., Εισαγωγή στην Ανάλυση Πειραματικών Μετρήσεων, Κλειδάριθμος 2019.

[2] Σάλτας Β., Εργαστηριακός Οδηγός Φυσικής, ΣΕΑΒ 2015.

[3] Taylor J., An Introduction to Error Analysis, University Science Books 1997.

[4] Μαθιουλάκης Μ., Μέτρηση, Ποιότητα Μέτρησης και Αβεβαιότητα, Ελληνική ένωση Εργαστηρίων 2004.