

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΙΚΗΣ ΡΕΥΣΤΟΜΗΧΑΝΙΚΗΣ

Άσκηση 1:

Να δείξετε ότι η δεύτερης τάξης εξίσωση: $\theta^2 u / \theta x \theta t = 0$ είναι υπερβολικού τύπου. Υποθέστε το παρακάτω ισοδύναμο σύστημα:

$$\frac{\theta u}{\theta t} - u = 0$$

$$\frac{\theta u}{\theta x} = 0$$

Υποθέστε ότι το παραπάνω σύστημα είναι υπερβολικού τύπου και ότι ο x και t άξονας είναι χαρακτηριστικοί.

Λύση:

Το παραπάνω σύστημα που δίνεται στην άσκηση μπορεί να πάρει την παρακάτω μορφή αν συνδυαστούν οι δύο εξισώσεις μεταξύ τους:

$$\theta(\theta u / \theta t - u) / \theta x = 0$$

$$\text{ή } \theta^2 u / \theta x \theta t - \theta u / \theta x = 0$$

$$\text{ή } \theta^2 u / \theta x \theta t = 0$$

Έτσι το σύστημα είναι υπερβολικού τύπου.

Επίσης το παραπάνω σύστημα μπορεί να γραφεί και ως:

$$\theta u / \theta t + \alpha \theta u / \theta x = u$$

Και

$$\beta \theta u / \theta t + \theta u / \theta x = 0$$

Όπου α και β είναι ίσα με μηδέν.

Αφού ισχύει αυτό τότε οι x και t άξονες είναι χαρακτηριστικοί.

Άσκηση 2:

α. Μετατρέψτε την εξίσωση $\theta \varphi / \theta t - a \theta^2 \varphi / \theta x^2 = 0$ σε ένα ισοδύναμο σύστημα με το να εισάγετε μία αξονική μεταβλητή η οποία να είναι: $p = \theta \varphi / \theta x$. Να δείξετε ότι το σύστημα είναι παραβολικού τύπου.

β. Αναλύστε την εξίσωση $\theta \varphi / \theta t - a(\theta^2 \varphi / \theta x^2 + \theta^2 \varphi / \theta y^2) = 0$ με παρόμοιο τρόπο και να δείξετε ότι είναι επίσης παραβολικού τύπου.

Λύση:

$$\alpha. \text{ Αντικαθιστούμε την } \theta \varphi / \theta t - a \theta^2 \varphi / \theta x^2 = 0$$

$$\text{με } \alpha \theta p / \theta x - \theta \varphi / \theta t = 0 \quad \text{και} \quad p = \theta \varphi / \theta x$$

Ακολουθώντας την παρακάτω διαδικασία παίρνουμε:

$$\det[A(dt/dx) - B] = 0$$

Η οποία δίνει:

$$\alpha(dt/dx)^2 = 0$$

Η μονή χαρακτηριστική διεύθυνση $dt/dx = 0$ υποδηλώνει ότι η εξίσωση είναι παραβολικού τύπου.

β. Εάν σκεφτούμε μία επιφάνεια του τύπου $y = \text{σταθερή}$ τότε αντιλαμβανόμαστε ότι ο χαρακτήρας της εξίσωσης είναι παραβολικού τύπου. Με παρόμοιο σκεπτικό αν θεωρήσουμε μία επιφάνεια η οποία να είναι της μορφής $x = \text{σταθερή}$ τότε η εξίσωση είναι παραβολικού τύπου ως προς t . Αν είχαμε μία επιφάνεια που να είναι της μορφής $t = \text{σταθερό}$ τότε όπως θα δούμε σε επόμενη άσκηση η εξίσωση θα ήταν ελλειπτικού τύπου.

Άσκηση 3:

Έστω το παρακάτω σύστημα εξισώσεων:

$$\frac{\theta u}{\theta x} + \frac{\theta v}{\theta y} = 0$$

$$\frac{\theta u}{\theta y} - \frac{\theta v}{\theta x} = 0$$

Να δείξετε ότι το παραπάνω σύστημα είναι ελλειπτικού τύπου,

α. άμεσα

β. με την εισαγωγή μίας νέας μεταβλητής ϕ , όπου $u = \theta\phi/\theta x$ και $v = \theta\phi/\theta y$.

Λύση:

α. Εφαρμόζοντας τη Μέθοδο Fourier στο σύστημα εξισώσεων της άσκησης δίνει:

$$\det[] = \lambda_x^2 + \lambda_y^2 = 0$$

ή

$$\frac{\lambda_x}{\lambda_y} = \pm i$$

Δύο φανταστικές λύσεις του συστήματος υποδηλώνουν ότι το σύστημα είναι ελλειπτικού τύπου.

β. Εάν $u = \theta\phi/\theta x$ και $v = \theta\phi/\theta y$ τότε

$$\frac{\theta^2 \phi}{\theta x^2} + \frac{\theta^2 \phi}{\theta y^2} = 0$$

Όπως φαίνεται η παραπάνω εξίσωση υποδηλώνει σύστημα ελλειπτικού τύπου.

Άσκηση 4:

Για την εξίσωση $y = \sin \pi x/2$ να υπολογιστεί το πηλίκο dy/dx στο σημείο $x=0.5$ με $\Delta x=0.1$ χρησιμοποιώντας:

$$\alpha. \frac{dy}{dx} \sim \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2\Delta x}$$

$$\beta. \frac{dy}{dx} \sim \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x}$$

$$\gamma. \frac{dy}{dx} \sim \frac{y_{j-2} - 8y_{j-1} + 8y_{j+1} - y_{j+2}}{12\Delta x}$$

και να γίνει σύγκριση της ακρίβειας και των αποτελεσμάτων.

Λύση:

Η ακριβής λύση για την dy/dx με βάση τα παραπάνω δεδομένα είναι: 1.11072. Αν υπολογίσουμε όμως αυτό το πηλίκο με τη μέθοδο της διακριτοποίησης θα έχουμε:

ΔΙΑΚΡΙΤΟΠΟΙΗΣΗ	dy/dx	ΑΠΟΛΥΤΟ ΣΦΑΛΜΑ
1. $\frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2\Delta x}$	1.106159	$0.456202 \cdot 10^{-2}$
2. $\frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x}$	1.019102	$0.916186 \cdot 10^{-1}$
3. $\frac{y_{j-2} - 8y_{j-1} + 8y_{j+1} - y_{j+2}}{12\Delta x}$	1.110699	$0.224740 \cdot 10^{-4}$

Από τον παραπάνω πίνακα φαίνεται ότι η πιο ακριβής λύση είναι η 3. και η λιγότερο ακριβής η 2.

Άσκηση 5:

Επαναλάβετε το παραπάνω πρόβλημα με $\Delta x = 0.05, 0.025, 0.0125$ και καθορίστε εάν η σύγκλιση με το Δx είναι συνεπής με τον 'οδηγό' όρο του σφάλματος αποκοπής.

Λύση:

Διακριτοποίηση:

$$\frac{dy}{dx} \sim \frac{y_{j+1} - y_{j-1}}{2\Delta x}$$

Δx	ΑΠΟΛΥΤΟ ΣΦΑΛΜΑ	RRE
0.1	$0.45620 \cdot 10^{-2}$	-
0.05	$0.11416 \cdot 10^{-2}$	~ 4
0.025	$0.28546 \cdot 10^{-3}$	~ 4
0.0125	$0.71368 \cdot 10^{-4}$	~ 4

Διακριτοποίηση:

$$\frac{dy}{dx} \sim \frac{y_{j+1} - y_j}{\Delta x}$$

Δx	ΑΠΟΛΥΤΟ ΣΦΑΛΜΑ	RRE
0.1	$0.91619 \cdot 10^{-1}$	-
0.05	$0.44737 \cdot 10^{-1}$	2.05
0.025	$0.22091 \cdot 10^{-1}$	2.03
0.0125	$0.10975 \cdot 10^{-1}$	2.01

Διακριτοποίηση:

$$\frac{dy}{dx} \sim \frac{y_{j-2} - 8y_{j-1} + 8y_{j+1} - y_{j+2}}{12\Delta x}$$

Δx	ΑΠΟΛΥΤΟ ΣΦΑΛΜΑ	RRE
0.1	$0.22474 \cdot 10^{-4}$	-
0.05	$0.14077 \cdot 10^{-5}$	~16
0.025	$0.88033 \cdot 10^{-7}$	~16
0.0125	$0.55028 \cdot 10^{-8}$	~16

RRE: Rate of Reduction Error

Άσκηση 6:

Εφαρμόστε την ανάλυση von Neumann και δείξτε ότι το σύστημα είναι σταθερό αν ισχύει ότι $0 < s \leq 0.5$.

Λύση:

Ας υποθέσουμε ότι στη συγκεκριμένη περίπτωση ισχύει ότι $\alpha = \alpha_x = \alpha_y$ και $\Delta x = \Delta y$, συνεπώς έχουμε ότι ισχύει: $s = s_x = s_y$.

Εφαρμόζοντας λοιπόν την ανάλυση von Neumann παίρνουμε ότι:

$$(G - 1) - 2s(\cos\theta_x - 1) - 2s(\cos\theta_y - 1) - 4s^2(\cos\theta_x - 1)(\cos\theta_y - 1) = 0$$

Αφού $\theta = \theta_x = \theta_y$

$$G = 1 + 4s(\cos\theta - 1) + 4s^2(\cos^2\theta - 2\cos\theta + 1)$$

$|G| \leq 1$ για $0 \leq s \leq 0.5$ όπως απαιτείται.