ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ FOURIER ΚΑΙ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Η ΑΝΑΓΚΗ ΓΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ FOURIER

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο αναπτύξαμε τη θεωρία και εξετάσαμε εφαρμογές που αναφέρονται στην ανάπτυξη μιας περιοδικής συναρτήσεως f(x) με περίοδο $2L$ σε σειρά Fourier. Είναι φυσικό να ρωτήσει κανείς τι γίνεται όταν η συνάρτηση f(x) δεν είναι περιοδική ή ισοδύναμα όταν $L \to \infty$. Θα δούμε στο κεφάλαιο αυτό ότι η σειρά Fourier γίνεται ένα ***ολοκλήρωμα Fourier***. Ακόμα θα εξετάσουμε τα ολοκληρώματα Fourier και τις εφαρμογές τους.

2. ΤΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ FOURIER

'Εάν ή συνάρτηση *f(x)* ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. η f(x) και η f'(x) είναι τμηματικά συνεχείς σε κάθε πεπερασμένο διάστημα,
2. το $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\,dx$ συγκλίνει, δηλ. η f(x) είναι απολύτως ολοκληρώσιμη στο (-∞, ∞), τότε

σύμφωνα με το ***ολοκληρωτικό θεώρημα του Fourier*** είναι:

$$\boxed{f(x) = \int_0^{+\infty} \{A(t)\cos tx + B(t)\sin tx\}\,dt} \tag{1}$$

όπου

$$A(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\cos tx\,dx$$

$$B(t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\sin tx\,dx \tag{2}$$

Η σχέση (1) ισχύει, εάν η f(x) είναι συνεχής στο σημείο x. Εάν η f(x) είναι ασυνεχής στο σημείο x, τότε πρέπει να αντικατασταθεί με την $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ όπως στην περίπτωση της σειράς Fourier. Ας σημειωθεί ότι οι παραπάνω συνθήκες είναι ικανές, αλλά όχι και αναγκαίες. Ή ομοιότητα των (1) και (2) με τις αντίστοιχες σχέσεις για τις σειρές Fourier είναι φανερή. Το δεξιό μέλος της (1) καλείται μερικές φορές ***ολοκληρωτικό ανάπτυγμα Fourier*** της f(x).

3. ΙΣΟΔΥΝΑΜΕΣ ΜΟΡΦΕΣ ΤΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΤΙΚΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ ΤΟΥ FOURIER

Το ολοκληρωτικό θεώρημα του Fourier μπορεί να γραφεί και στις μορφές

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{t=0}^{\infty} dt \int_{u=-\infty}^{\infty} du\, f(u)\cos t(x-u) \tag{3}$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty} dt \int_{u=-\infty}^{\infty} du\; f(u)e^{it(x-u)} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty}dt\,e^{itx}\int_{u=-\infty}^{\infty}du\;f(u)e^{-itu}} \qquad (4)$$

όπου εννοείται ότι, εάν η f(x) δεν είναι συνεχής στο x, το αριστερό μέλος των προηγούμενων σχέσεων πρέπει να αντικατασταθεί με $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$.

Η σχέση (3) αποδεικνύεται ως εξής: Κατ' αρχάς οι σχέσεις (2) γράφονται:

$$A(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos tu\,du$$

$$B(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin tu\,du \qquad (2')$$

Θέτουμε τις (2′) στην (1) και έχουμε:

$$f(x)=\int_{t=0}^{+\infty}dt\left\{\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cos tu\,du\right)\cos tx+\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\sin tu\,du\right)\sin tx\right\}=$$

$$=\int_{t=0}^{+\infty}dt\left\{\frac{1}{\pi}\int_{u=-\infty}^{+\infty}du\,f(u)\cos tu\cos tx+\frac{1}{\pi}\int_{u=-\infty}^{+\infty}du\,f(u)\sin tu\sin tx du\right\}=$$

$$=\int_{t=0}^{+\infty}dt\left\{\frac{1}{\pi}\int_{u=-\infty}^{+\infty}du\,f(u)\left[\cos tu\cos tx+\sin tu\sin tx\right]\right\}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{t=0}^{+\infty}dt\int_{u=-\infty}^{+\infty}du\,f(u)\cos t\left(x-u\right)$$

Η σχέση (4) αποδεικνύεται ως εξής:
Επειδή η συνάρτηση cost(x-u) είναι άρτια ως προς t, η σχέση (3) μπορεί να γραφεί και ως:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty}dt\int_{u=-\infty}^{\infty}du\,f(u)\cos t(x-u) \qquad (A)$$

Επίσης , επειδή η sint(x-u) είναι περιττή ως προς t, θα είναι:

$$0=\frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty}dt\int_{u=-\infty}^{\infty}du\,f(u)\sin t(x-u) \qquad (B)$$

Πολλαπλασιάζουμε την (Β) επί i και προσθέτοντας την (Α) βρίσκουμε

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty}dt\int_{u=-\infty}^{\infty}du\,f(u)\left[\cos t(x-u)+i\sin t(x-u)\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty}dt\int_{u=-\infty}^{\infty}du\,f(u)e^{it(x-u)}=\frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty}dt\,e^{itx}\int_{u=-\infty}^{\infty}du\;f(u)e^{-itu}$$

Οι σχέσεις (3) και (4) μπορούν να απλοποιηθούν λίγο, εάν η f(x) είναι περιττή ή άρτια συνάρτηση, οπότε έχουμε

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{t=0}^{\infty} dt\, \sin tx \int_{u=0}^{\infty} du\, f(u)\sin tu \quad \text{για f(x) περιττή} \tag{5}$$

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{t=0}^{\infty} dt\, \cos tx \int_{u=0}^{\infty} du\, f(u)\cos tu \quad \text{για f(x) άρτια} \tag{6}$$

4. Ο ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Από την (4) έπεται ότι, εάν θέσουμε

$$\boxed{F(t) = \int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)e^{-itu}du} \tag{7}$$

τότε

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty} F(t)e^{itx}dt} \tag{8}$$

Ή συνάρτηση F(t) καλείται ***μετασχηματισμένη Fourier*** της f(x) και γράφεται F(t) = $\Im\{f(x)\}$. Η συνάρτηση f(x) καλείται ***αντίστροφη μετασχηματισμένη Fourier*** της F(t) και γράφεται f(x) = $\Im^{-1}\{F(t)\}$. Οι σχέσεις (7) και (8) ορίζουν αντίστοιχα το ***μετασχηματισμό Fourier*** και τον ***αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier***, δηλ. τούς κανόνες υπολογισμού της F(t) από την f(x) και αντίστροφα.

Σημείωση: Οι σταθερές 1 και 1/2π μπροστά στα ολοκληρώματα (7) και (8) μπορούν να αντικατασταθούν με οποιεσδήποτε σταθερές πού έχουν γινόμενο 1/2π. Στις σημειώσεις αυτές όμως θα χρησιμοποιήσουμε τις (7) και (8), όπως δίνονται εδώ.

5. ΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΚΑΙ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΟΕΙΔΗΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΣ FOURIER

Εάν η f(x) είναι περιττή, το ολοκληρωτικό θεώρημα του Fourier δίνει την (5). Εάν θέσουμε

$$F_s(t) = \int_{u=0}^{\infty} f(u)\sin tu\, du \tag{9}$$

τότε η (5) γίνεται

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{u=0}^{\infty} F_s(t)\sin tx\, dt \tag{10}$$

Ή $F_s(t)$ καλείται ***ημιτονοειδής μετασχηματισμένη Fourier*** της f(x), ενώ η f(x) καλείται ***αντίστροφη ημιτονοειδής μετασχηματισμένη Fourier*** της $F_s(t)$.

Όμοια, εάν η f(x) είναι άρτια συνάρτηση, το ολοκληρωτικό θεώρημα του Fourier δίνει την (6). Έτσι, εάν θέσουμε

$$F_c(t) = \int_{u=0}^{\infty} f(u)\cos tu\, du \tag{11}$$

η (6) γίνεται

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{t=0}^{\infty} F_c(t)\cos tx\, dt \tag{12}$$

Ή $F_c(t)$ καλείται ***συνημιτονοειδής μετασχηματισμένη Fourier*** της f(x) ενώ η f(x) καλείται ***αντίστροφη συνημιτονοειδής μετασχηματισμένη Fourier*** της $F_c(t)$.

6. ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ PARSEVAL ΓΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ FOURIER

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο δείξαμε την ταυτότητα του Parseval για σειρές Fourier. Ανάλογες σχέσεις ισχύουν για ολοκληρώματα Fourier.

Εάν η F(t) και η G(t) είναι οι μετασχηματισμένες Fourier των f(x) καί g(x) αντίστοιχα, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(t)\overline{G(t)}\,dt \qquad (13)$$

όπου η γραμμή πάνω από μια ποσότητα συμβολίζει τη συζυγή μιγαδική της. Ειδικότερα, εάν f(x)=g(x) και F(t) = G(t), έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(t)|^2\,dt \qquad (14)$$

Συνήθως καλούμε την (14), ή την πιο γενική σχέση (13), ***ταυτότητα του Parseval*** για ολοκληρώματα Fourier.

Αντίστοιχες σχέσεις μπορούν να γραφούν για ημιτονοειδείς και συνημιτονοειδείς μετασχηματισμένες Fourier. Εάν $F_s(t)$ καί $G_s(t)$ είναι οι ημιτονοειδείς μετασχηματισμένες Fourier των f(x) και g(x) αντίστοιχα, τότε

$$\int_{0}^{\infty} f(x)g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_s(t)G_s(t)\,dt \qquad (15)$$

Όμοια, εάν $F_c(t)$ και $G_c(t)$ είναι οι συνημιτονοειδείς μετασχηματισμένες Fourier των f(x) και g(x) αντίστοιχα, τότε

$$\int_{0}^{\infty} f(x)g(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} F_c(t)G_c(t)\,dt \qquad (16)$$

Στην ειδική περίπτωση όπου f(x)=g(x) οι (15) και (16) γίνονται αντίστοιχα

$$\int_{0}^{\infty} \{f(x)\}^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \{F_s(t)\}^2\,dt \qquad (17)$$

$$\int_{0}^{\infty} \{f(x)\}^2\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \{F_c(t)\}^2\,dt \qquad (18)$$

7. ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ ΣΥΝΕΛΙΞΕΩΣ ΓΙΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΕΝΕΣ FOURIER

Ή ***συνέλιξη*** των συναρτήσεων f(x) και g(x) ορίζεται με τη σχέση

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du \qquad (19)$$

Ένα σπουδαίο θεώρημα, που συχνά καλείται ***θεώρημα της συνελίξεως***, λεει ότι η μετασχηματισμένη Fourier της συνελίξεως των f(x) και g(x) είναι ίση με το γινόμενο των μετασχηματισμένων Fourier των f(x) και g(x), δηλ. ότι

$$\mathfrak{I}\{f * g\} = \mathfrak{I}\{f\}\mathfrak{I}\{g\} \qquad (20)$$

Ή συνέλιξη έχει διάφορες αξιοσημείωτες ιδιότητες. Έτσι Π.χ. για τις συναρτήσεις f, g και h έχουμε

$$f*g = g*f, \quad f*(g*h) = (f*g)*h, \quad f*(g+h) = f*g+f*h \qquad (21)$$

δηλ. η συνέλιξη έχει την αντιμεταθετική, προσεταιριστική και επιμεριστική ιδιότητα.

8. ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ FOURIER

Τα ολοκληρώματα και οι μετασχηματισμένες Fourier χρησιμοποιούνται στη λύση διαφόρων προβλημάτων συνοριακών τιμών (Προ βλ. 5.20-5.22).

9. ΛΥΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. (**α**) Βρείτε τη μετασχηματισμένη Fourier της $f(x)=\begin{cases}1 & |x|<\beta \\ 0 & |x|>\beta\end{cases}$

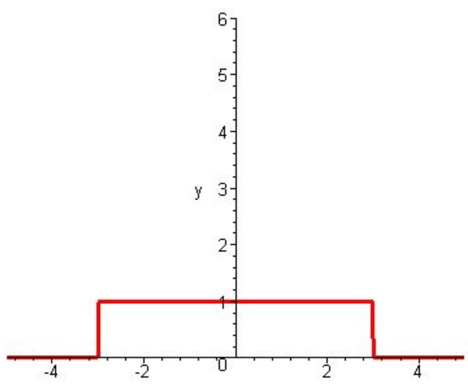
(**β**) Να γίνει γραφική παράσταση της f(x) και της μετασχηματισμένης Fourier για $\beta = 3$.

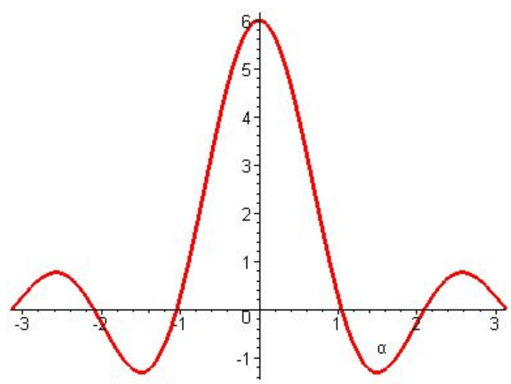
Απάντηση: (**α**) Ή μετασχηματισμένη Fourier της f(x) είναι

$$F(t)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx=\int_{-\beta}^{\beta}(1)e^{-itx}dx=\left.\frac{e^{-itx}}{-it}\right|_{-\beta}^{\beta}=\frac{e^{it\beta}-e^{-it\beta}}{it}=2\frac{\sin(t\beta)}{t} \quad t\neq 0.$$

Για t=0 έχουμε F(0) =2β.

(**β**) Οι γραφικές παραστάσεις των f(x) και F(t) για β = 3 δίδονται στα Σχ. 1 και 2 αντίστοιχα.





2. (**α**) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο πρόβλημα υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\beta t)\cos(xt)}{t}dt$$

(**β**) Υπολογίστε το $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin u}{u}du$

Απάντηση: (**α**) Από το ολοκληρωτικό θεώρημα του Fourier έπεται ότι, εάν

$$F(t)=\int_{x=-\infty}^{\infty} f(x)e^{-itx}dx \quad \text{τότε} \quad f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty}F(t)e^{itx}dt$$

Συνεπώς από το προηγούμενο πρόβλημα έχουμε :

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty}2\frac{\sin\beta t}{t}e^{itx}dt=\begin{cases}1 & |x|<\beta \\ 1/2 & |x|=\beta \\ 0 & |x|>\beta\end{cases} \qquad (1)$$

Το αριστερό μέλος της (1) ισούται με

$$\frac{1}{\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\beta t)\cos(tx)}{t}dt+\frac{i}{\pi}\int_{t=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\beta t)\sin(tx)}{t}dt \qquad (2)$$

Ή ολοκληρωτέα συνάρτηση στο δεύτερο ολοκλήρωμα της (2) είναι περιττή και συνεπώς το ολοκλήρωμα είναι μηδέν. Άρα από τις (1) και (2) έχουμε ,

$$\int_{t=-\infty}^{\infty}\frac{\sin(\beta t)\cos(tx)}{t}dt=\begin{cases}\pi & |x|<\beta\\ \pi/2 & |x|=\beta\\ 0 & |x|>\beta\end{cases} \qquad (3)$$

(**β**) Εάν x =0 και β = 1, έχουμε από τη σχέση (3)

$$\int_{t=-\infty}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\pi \quad \text{ή} \quad \int_{t=0}^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}$$

επειδή η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι άρτια.

3. (**α**) Βρείτε τη συνημιτονοειδή μετασχηματισμένη Fourier της $f(x)=e^{-mx}$ $m>0$.
(**β**) Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο αποτέλεσμα δείξτε ότι

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(pv)}{v^2+\beta^2}dv=\frac{\pi}{2\beta}e^{-p\beta} \qquad p>0,\ \beta>0$$

<u>Απάντηση</u>: (**α**) Η συνημιτονοειδής μετασχηματισμένη Fourier της $f(x)=e^{-mx}$ είναι

$$F_C(t)=\int_0^\infty e^{-mu}\cos tu\,du=\left.\frac{e^{-mu}\left(-m\cos tu+t\sin tu\right)}{m^2+t^2}\right|_0^\infty=\frac{m}{m^2+t^2}$$

(**β**) Από την σχέση (12), παρ. 5: $f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_c(t)\cos tx\ dt$ έχουμε:

$$e^{-mx}=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{m\cos tx}{m^2+t^2}dt \Rightarrow \int_0^\infty\frac{m\cos tx}{m^2+t^2}dt=\frac{\pi}{2m}e^{-mx}$$

Αντικαθιστώντας το t με v, το x με p και το m με β έχουμε:

$$\int_{0}^{\infty}\frac{\cos(pv)}{v^2+\beta^2}dv=\frac{\pi}{2\beta}e^{-p\beta}$$

4. Να λυθεί η ολοκληρωτική εξίσωση

$$\int_0^\infty f(x)\sin(\alpha x)dx=\begin{cases}1-\alpha & 0\le\alpha\le1\\ 0 & \alpha>1\end{cases}$$

<u>Απάντηση</u>: Εάν θέσουμε:

$$F_s(\alpha)=\int_0^\infty f(x)\sin(\alpha x)dx=\begin{cases}1-\alpha & 0\le\alpha\le1\\ 0 & \alpha>1\end{cases}$$

Τότε έχουμε από τη σχέση (10), παρ. 5:

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty F_s(\alpha)\sin\alpha x\ d\alpha=\frac{2}{\pi}\int_0^1(1-\alpha)\sin\alpha x\ d\alpha=\frac{2\left(x-\sin x\right)}{\pi x^2}$$

Μία τυπική απόδειξη του ολοκληρωτικού θεωρήματος του Fourier

Αρχίζουμε από την γνωστή σειρά Fourier:

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cos\frac{n\pi x}{L}+\beta_n\sin\frac{n\pi x}{L}\right] \tag{1}$$

όπου

$$\alpha_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\,,\qquad \beta_n=\frac{1}{L}\int_{-L}^{L}f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx \tag{2}$$

Θέτουμε ω=π/L και οι παραπάνω τύποι γράφονται:

$$f(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\alpha_n\cos n\omega x+\beta_n\sin n\omega x\right] \tag{1'}$$

$$\alpha_n=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(x)\cos n\omega x dx\,,\quad b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(x)\sin n\omega x dx \tag{2'}$$

Αντικαθιστούμε τις (2′) στην (1′):

$$f(x)=\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(s)ds+\frac{\omega}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\cos n\omega x\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(s)\cos n\omega s ds+\sin n\omega x\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(s)\sin n\omega s ds\right]=$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(s)ds+\frac{\omega}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(s)\left[\cos n\omega x\ \cos n\omega s+\sin n\omega x\ \sin n\omega s\right]ds=$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(s)ds+\frac{\omega}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(s)\left[\cos n\omega(x-s)\right]ds$$

Επειδή όμως cos[-nω(x-s)]=cos[nω(x-s)], η παραπάνω σχέση γράφεται:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(s)\left[\cos n\omega(x-s)\right]ds \tag{3}$$

Εάν υποθέσουμε το ω πολύ μικρό, (ισοδύναμα το L πολύ μεγάλο), τότε

$$\int_{-\pi/\omega}^{\pi/\omega}f(s)\left[\cos n\omega(x-s)\right]ds \approx \int_{-\infty}^{\infty}f(s)\left[\cos n\omega(x-s)\right]ds=\theta(n\omega,x)$$

Η ακρίβεια της παραπάνω σχέσεως είναι τόση μεγάλη όσο μικρό είναι το ω.
Έτσι η σχέση (3) γράφεται:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega\theta(n\omega,x) \tag{4}$$

Αλλά για μικρά ω

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\omega\theta(n\omega,x)\approx\int_{-\infty}^{\infty}\theta(u,x)du$$

Το οποίο προκύπτει από τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος.
Η εξίσωση (4) με πολύ μεγάλη προσέγγιση γράφεται:

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\theta(u)du=\frac{1}{2\pi}\int_{u=-\infty}^{\infty}du\int_{s=-\infty}^{\infty}ds\,f(s)\cos u(x-s) \tag{5}$$

Για ω → 0 η (5) είναι το ολοκληρωτικό θεώρημα του Fourier.