ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ - ΣΕΙΡΕΣ

Το ορισμένο ολοκλήρωμα ή ολοκλήρωμα Riemann μιας πραγματικής συνάρτησης f με διάστημα ολοκλήρωσης το πεπερασμένο διάστημα $[\alpha,\beta]$, υπάρχει όταν:

- ✓ η f είναι συνεχής στο διάστημα αυτό, καθώς επίσης και όταν
- ✓ έχει πεπερασμένο αριθμό ασυνεχειών αλλά είναι φραγμένη στο $[\alpha,\beta]$.

Η έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος μπορεί να επεκταθεί και στις περιπτώσεις όπου τα άκρα των διαστημάτων ολοκλήρωσης γίνονται άπειρα, καθώς επίσης και στις περιπτώσεις όπου η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση δεν είναι φραγμένη σε διάστημα με πεπερασμένα άκρα.

>---------------<

Το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ καλείται ***γενικευμένο ολοκλήρωμα***, αν συμβαίνει ένα τουλάχιστον από τα εξής:

(1) $\alpha = -\infty$ **ή** $\beta = +\infty$ **ή** και τα δύο, δηλαδή το ένα ή και τα δύο όρια της ολοκληρώσεως είναι άπειρο.

(2) Η $f(x)$ δεν έχει πεπερασμένη τιμή σε ένα ή περισσότερα σημεία του $\alpha \le x \le \beta$. Τέτοια σημεία καλούνται ανώμαλα σημεία της $f(x)$.

Τα ολοκληρώματα στα οποία συμβαίνει το (1) ή το (2) καλούνται ***γενικευμένα ολοκληρώματα πρώτου*** και ***δεύτερου είδους*** αντίστοιχα. Τα ολοκληρώματα στα οποία συμβαίνουν και το (1) και (2) καλούνται ***γενικευμένα ολοκληρώματα τρίτου είδους***.

>---------------<

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε εκτενέστερα τα γενικευμένα ολοκληρώματα $1^{ου}$, $2^{ου}$ και $3^{ου}$ είδους.

6.1. Γενικευμένα ολοκληρώματα πρώτου είδους

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα $1^{ου}$ είδους γενικεύει την έννοια του ορισμένου ολοκληρώματος για διαστήματα ολοκλήρωσης της μορφής $[\alpha,+\infty)$, $(-\infty,\beta]$ και $(-\infty,+\infty)$. Έτσι έχουμε τον κατωτέρω ορισμό:

Ορισμός 6.1.1

Αν μια πραγματική συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[\alpha, x]$ με $x \in [\alpha, +\infty)$ τότε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_\alpha^x f(t)\,dt$ ονομάζεται **γενικευμένο ολοκλήρωμα 1ου είδους** και συμβολίζεται ως εξής:

$$\lim_{x \to +\infty} \int_\alpha^x f(t)\,dt = \int_\alpha^{+\infty} f(x)\,dx . \tag{6.1.1}$$

Όταν η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[x, \beta]$ με $x \in (-\infty, \beta]$ τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα 1ου είδους έχει τη μορφή:

$$\int_{-\infty}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{x \to -\infty} \int_x^{\beta} f(t)\,dt . \tag{6.1.2}$$

Αν τα όρια (6.1.1) και (6.1.2) υπάρχουν τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **συγκλίνει**, ενώ όταν δεν υπάρχουν τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα **αποκλίνει**.

Παραδείγματα

(α) Εκθετικό (ή γεωμετρικό) ολοκλήρωμα $\int_\alpha^{+\infty} e^{-kx}\,dx$.

Για να μελετήσουμε την σύγκλιση του ολοκληρώματος αυτού πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό 6.1.1 να υπολογίσουμε το όριο $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_\alpha^x e^{-kt}\,dt$.

Επειδή $\int_\alpha^x e^{-kt}\,dt = \frac{e^{-k\alpha}}{k} - \frac{e^{-kx}}{k}$ θα έχουμε

$$\int_\alpha^{+\infty} e^{-kx}\,dx = \lim_{x \to +\infty} \int_\alpha^x e^{-kt}\,dt = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{e^{-k\alpha}}{k} - \frac{e^{-kx}}{k} \right) = \begin{cases} \dfrac{e^{-k\alpha}}{k} & \text{οταν } k > 0 \\ +\infty & \text{οταν } k \le 0 \end{cases} .$$

Άρα το εκθετικό ολοκλήρωμα συγκλίνει όταν $k > 0$ και αποκλίνει όταν $k \le 0$.

(β) s-ολοκλήρωμα πρώτου είδους $\int_\alpha^{+\infty} \frac{dx}{x^s}$, $\alpha > 0, s \in \mathbb{R}$.

Έχουμε ότι $\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{dx}{x^s}=\lim_{x\to+\infty}\int_{\alpha}^{x}\frac{dt}{t^s}=\begin{cases}\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{1-s}-\alpha^{1-s}}{1-s} & \text{οταν } s\neq 1\\ \lim_{x\to+\infty}\left(\ln x-\ln\alpha\right) & \text{οταν } s=1\end{cases}$.

Ο υπολογισμός των ανωτέρω ορίων μας οδηγεί στο αποτέλεσμα

$$\int_{\alpha}^{+\infty}\frac{dx}{x^s}=\begin{cases}\frac{\alpha^{1-s}}{s-1} & \text{οταν } s>1\\ +\infty & \text{οταν } s\leq 1\end{cases}.$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι το s-ολοκλήρωμα συγκλίνει όταν το s είναι μεγαλύτερο της μονάδας και αποκλίνει όταν το s είναι μικρότερο ή ίσο με την μονάδα.

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα 1ου είδους της μορφής $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ (δηλαδή και τα δύο όρια είναι άπειρο)

Αν η πραγματική συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα [α, β] τότε το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx$ ορίζεται ως εξής

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx+\int_{c}^{+\infty}f(x)dx. \tag{6.1.3}$$

όπου c οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός.

Αν υποθέσουμε ότι υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{c}^{x}f(t)dt=\int_{c}^{+\infty}f(x)dx=\ell_1\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{c}f(t)dt=\int_{-\infty}^{c}f(x)dx=\ell_2\in\mathbb{R} \tag{6.1.4}$$

δηλαδή τα ολοκληρώματα του δεύτερου μέρους του ορισμού (6.1.3) συγκλίνουν, τότε προσθέτοντας τα όρια αυτά έχουμε:

$$\lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{c}f(t)dt+\lim_{x\to+\infty}\int_{c}^{x}f(t)dt=\lim_{x\to\infty}\left[\int_{-x}^{c}f(t)dt+\int_{c}^{x}f(t)dt\right]=\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x}f(t)dt. \tag{6.1.5}$$

Από τις σχέσεις (6.1.3) και (6.1.5) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} f(t)\,dt \qquad (6.1.6)$$

Αν όμως $\ell_1 = +\infty$ και $\ell_2 = -\infty$ (ή αντιστρόφως) τότε η σχέση (6.1.6) δεν ισχύει.

Παράδειγμα

Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = x$, τότε τα ολοκληρώματα του πρώτου μέλους της (6.1.6) δίνουν

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{c}^{x} tdt = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-c^2}{2} = +\infty \text{ και } \lim_{x\to-\infty}\int_{x}^{c} tdt = \lim_{x\to-\infty}\frac{c^2-x^2}{2} = -\infty,$$

ενώ το τελευταίο όριο της (6.1.6) είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\int_{-x}^{x} tdt = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-x^2}{2} = 0$$

Δεν μπορούμε όμως να πούμε ότι $+\infty-\infty = 0$.

Επομένως, σύμφωνα με τα παραπάνω, θα λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-x}^{x} f(x)dx$ **συγκλίνει** μόνο όταν και τα δύο ολοκληρώματα του ορισμού (6.1.3) συγκλίνουν και ότι **δεν υπάρχει** όταν τουλάχιστον ένα από αυτά αποκλίνει.

6.2 Γενικευμένα ολοκληρώματα δεύτερου είδους

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα 2ου είδους γενικεύει το ορισμένο ολοκλήρωμα στην περίπτωση όπου η συνάρτηση f απειρίζεται για κάποια τιμή της μεταβλητής στο διάστημα ολοκλήρωσης $[\alpha,\beta]$.

Ορισμός 2.1

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[\alpha, x]$ με $x \in [\alpha, \beta)$ και $\lim_{x\to\beta^-} f(x) = \pm\infty$. Ονομάζουμε **γενικευμένο ολοκλήρωμα 2ου είδους** το όριο $\lim_{x\to\beta^-}\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ ή ισοδύναμα το $\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\alpha}^{\beta-\varepsilon} f(x)dx$ και το συμβολίζουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{x\to\beta^-}\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt. \qquad (6.2.1)$$

Μια άλλη μορφή γενικευμένων ολοκληρωμάτων $2^{ου}$ είδους είναι

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{x\to\alpha^+}\int_{x}^{\beta} f(t)\,dt \qquad (6.2.2)$$

Όπου η συνάρτηση f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $[x, \beta]$ με $x \in (\alpha, \beta]$ και $\lim_{x\to\alpha^+} f(x) = \pm\infty$.

Στις εκφράσεις (6.2.1) και (6.2.2) η συνάρτηση f δεν ορίζεται αντίστοιχα στο πάνω και στο κάτω άκρο του διαστήματος ολοκλήρωσης.

Αν τα ανωτέρω όρια υπάρχουν λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $2^{ου}$ είδους **συγκλίνει**, διαφορετικά λέμε ότι **αποκλίνει**.

Παραδείγματα

(α) s-ολοκληρώματα δεύτερου είδους $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(x-\alpha)^s}$ και $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(\beta-x)^s}$, $s \in \mathbb{R}$.

Από τον ορισμό (6.2.1) έχουμε ότι $\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(x-\alpha)^s} = \lim_{x\to\alpha^+}\int_{x}^{\beta}\frac{dt}{(t-\alpha)^s} = \lim_{x\to\alpha^+}\begin{cases}\dfrac{(\beta-\alpha)^{1-s}-(x-\alpha)^{1-s}}{1-s} & \alpha\nu\ s\neq 1\\ \ln(\beta-\alpha)-\ln(x-\alpha) & \alpha\nu\ s=1\end{cases}$.

Μετά τον υπολογισμό του ανωτέρου ορίου βρίσκουμε ότι

$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{dx}{(x-\alpha)^s} = \begin{cases}\dfrac{(\beta-\alpha)^{1-s}}{1-s} & \alpha\nu\ s<1\\ +\infty & \alpha\nu\ s\geq 1\end{cases}.$$

Έτσι το s-ολοκλήρωμα $2^{ου}$ είδους συγκλίνει για $s<1$ και αποκλίνει για $s\geq 1$.

Σύγκλιση κατά Cauchy

Θεωρούμε την περίπτωση κατά την οποία η συνάρτηση f ορίζεται στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ εκτός από ένα ενδιάμεσο σημείο x_0 του διαστήματος αυτού όπου $\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$.

Αν υπάρχουν τα όρια

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\alpha}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{x_0} f(x)\,dx = \ell_1 \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{x_0}^{\beta} f(x)\,dx = \ell_2 \in \mathbb{R} \tag{6.2.3}$$

τότε προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές έχουμε

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\alpha}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{\alpha}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{\beta} f(x)\,dx \right]. \tag{6.2.4}$$

Στην περίπτωση αυτή ορίζουμε ως γενικευμένο ολοκλήρωμα 2^ου^ είδους της μορφής $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ το εξής

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[\int_{\alpha}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^{\beta} f(x)\,dx \right] \tag{6.2.5}$$

ή διαφορετικά

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\alpha}^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{x_0+\varepsilon}^{\beta} f(x)\,dx \tag{6.2.6}$$

Αν ένα από τα όρια της σχέσης (6.2.6) δεν υπάρχει λέμε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ αποκλίνει. Αν όμως $\ell_1 = +\infty$ και $\ell_2 = -\infty$ (ή αντιστρόφως) τότε η ισότητα (6.2.4) δεν ισχύει.

Παράδειγμα

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $\int_0^5 \frac{dx}{4-x}$.

Για το ολοκλήρωμα αυτό, η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση του οποίου δεν ορίζεται στο σημείο 4 του διαστήματος ολοκλήρωσης, τα όρια της (6.2.4) είναι

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_0^{4-\varepsilon} \frac{dx}{4-x} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left[-\ln|4-x| \right]_0^{4-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \left(-\ln\varepsilon + \ln 4 \right) = +\infty,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_{4+\varepsilon}^{5}\frac{dx}{4-x}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[-ln|4-x|\right]_{4+\varepsilon}^{5}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-ln1+ln\varepsilon\right)=-\infty\ ,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{0}^{4-\varepsilon}\frac{dx}{4-x}+\int_{4+\varepsilon}^{5}\frac{dx}{4-x}\right]\int_{4+\varepsilon}^{5}\frac{dx}{4-x}=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(-ln\varepsilon+ln4+ln\varepsilon-ln1\right)=ln4$$

Δεν μπορούμε όμως να πούμε ότι $+\infty-\infty=ln4$.

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι το άθροισμα $\int_{\alpha}^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^{\beta} f(x)dx$ συγκλίνει μόνο όταν και τα δύο ολοκληρώματα συγκλίνουν οπότε γράφουμε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=\int_{\alpha}^{x_0} f(x)dx+\int_{x_0}^{\beta} f(x)dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{\alpha}^{x_0-\varepsilon} f(x)dx+\int_{x_0+\varepsilon}^{\beta} f(x)dx\right]$$

Αν τα όρια (6.2.3) δεν υπάρχουν αλλά υπάρχει το όριο

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\int_{\alpha}^{x_0-\varepsilon} f(x)dx+\int_{x_0+\varepsilon}^{\beta} f(x)dx\right]$$

τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$ **συγκλίνει κατά Cauchy** και η τιμή του ονομάζεται πρωτεύουσα τιμή του Cauchy.

<u>6.3. Γενικευμένα ολοκληρώματα τρίτου είδους</u>

Το γενικευμένο ολοκλήρωμα 3^{ου} είδους αναφέρεται σε διαστήματα με άκρα $+\infty$ ή και $-\infty$ και συγχρόνως δεν είναι φραγμένες σ' ένα ή περισσότερα σημεία των διαστημάτων αυτών.

Ορισμός 6.3.1

Έστω μια πραγματική συνάρτηση f η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα $(\alpha, x]$ με $x\in(\alpha,+\infty)$ και $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)=\pm\infty$. Ονομάζουμε **γενικευμένο ολοκλήρωμα 3^{ου} είδους** το άθροισμα του γενικευμένου ολοκληρώματος 1^{ου} είδους $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)dx$ και του 2^{ου} είδους $\int_{\alpha}^{x_0} f(x)dx$ με $x_0\in(\alpha,+\infty)$, δηλαδή

$$\int_{\alpha}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx . \qquad (6.3.1)$$

Αν τα ολοκληρώματα $\int_{x_0}^{+\infty} f(x)\,dx$ και $\int_{\alpha}^{x_0} f(x)\,dx$ συγκλίνουν τότε λέμε ότι το γενικευμένο ολοκλήρωμα 3ου είδους **συγκλίνει**. Εάν ένα από τα παραπάνω γενικευμένα ολοκληρώματα αποκλίνει τότε και το γενικευμένο ολοκλήρωμα 3ου είδους **αποκλίνει**.

Λυμένες ασκήσεις

Άσκηση 1

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+9}$.

Λύση

Υπολογίζουμε πρώτα το αντίστοιχο αόριστο ολοκλήρωμα

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+9} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+8} = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{\left(\frac{x+1}{\sqrt{8}}\right)^2+1} = \frac{1}{\sqrt{8}} \arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{8}}\right).$$

Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση ορίζεται για κάθε πραγματικό αριθμό, άρα σύμφωνα με τον ορισμό (6.1.3) (για το γενικευμένο ολοκλήρωμα 1ου είδους) έχουμε

$$I = \int_{-\infty}^{c} \frac{dx}{x^2+2x+9} + \int_{c}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+9} = I_1 + I_2$$

$$I_1 = \lim_{x\to-\infty} \int_{x}^{c} \frac{dt}{t^2+2t+9} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{c+1}{\sqrt{8}}\right) - \frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{8}}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{c+1}{\sqrt{8}}\right) + \frac{\pi}{2\sqrt{8}}$$

$$I_2 = \lim_{x\to+\infty} \int_{c}^{x} \frac{dt}{t^2+2t+9} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{x+1}{\sqrt{8}}\right) - \frac{1}{\sqrt{8}}\arctan\left(\frac{c+1}{\sqrt{8}}\right)\right]$$

$$= \frac{\pi}{2\sqrt{8}} - \frac{1}{\sqrt{8}} arctan\left(\frac{c+1}{\sqrt{8}}\right)$$

Προσθέτοντας τα I_1 και I_2 βρίσκουμε ότι $I = \frac{\pi}{\sqrt{8}}$.

Άσκηση 2

Να υπολογισθεί το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$.

Λύση

Για τον υπολογισμό του $I = \int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx$ θέτουμε $x = u^2$ και έχουμε

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2\int e^{-u} du = -2e^{-u} = -2e^{-\sqrt{x}} .$$

Επομένως $I = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = -2e^{-\sqrt{x}}\Big|_1^{+\infty} = \lim_{x \to +\infty}\left(-2e^{-\sqrt{x}}\right) + 2e^{-1} = 2e^{-1}$.

Άσκηση 3

Να μελετηθεί ως προς την σύγκλιση το ολοκλήρωμα $I = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$.

Λύση

Πρόκειται για ολοκλήρωμα 3^{ου} είδους, έτσι από τον ορισμό (6.3.1) και τους ορισμούς (6.1.1) και (6.2.1) έχουμε

$$I = \int_1^{x_0} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} + \int_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} = \lim_{x \to 1^+} \int_x^{x_0} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}} + \lim_{x \to +\infty} \int_{x_0}^{x} \frac{dt}{t\sqrt{t-1}} .$$

Με την αντικατάσταση $\sqrt{t-1} = u$ βρίσκουμε ότι $\int \frac{dt}{t\sqrt{t-1}} = 2\, arctan\sqrt{t-1}$.

Αντικαθιστούμε την ισότητα αυτή στην προηγούμενη σχέση και έχουμε

$I = -\lim_{x\to 1^+} 2\,arctan\sqrt{x-1} + \lim_{x\to +\infty} 2\,arctan\sqrt{x-1} = \pi$, άρα το I συγκλίνει.

6.4. Σειρές πραγματικών αριθμών

Η έννοια της **σειράς πραγματικών αριθμών** γενικεύει την έννοια του πεπερασμένου αθροίσματος πραγματικών αριθμών, γι' αυτό μερικές φορές ονομάζεται και ***άθροισμα με άπειρους όρους***. Όμως η διαφορά των δύο αυτών εννοιών είναι σαφής διότι το άθροισμα πραγματικών αριθμών είναι επίσης πραγματικός αριθμός που ορίζεται μονοσήμαντα, ενώ ένα άθροισμα με άπειρους όρους είναι το όριο μιας ακολουθίας το οποίο μπορεί να υπάρχει αλλά και να μην υπάρχει.

>---------------<

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Μια συνάρτηση μιας θετικής ακέραιας μεταβλητής, που συμβολίζεται με f(n) ή u_n , όπου n=1,2,3,…, καλείται **ακολουθία**. Έτσι, ακολουθία είναι ένα σύνολο αριθμών $u_1, u_2, u_3, ...$ σε ορισμένη διάταξη (δηλ. μια *αντιστοιχία* με τους φυσικούς αριθμούς) και η οποία σχηματίζεται σύμφωνα με ορισμένο κανόνα. Κάθε αριθμός της ακολουθίας λέγεται *όρος*. Ο u_n λέγεται *γενικός όρος* ή *όρος τάξεως n* ή ακόμα *n-στός όρος*. Η ακολουθία λέγεται *πεπερασμένη* ή *άπειρη*, αν έχει αντίστοιχα πεπερασμένο ή άπειρο πλήθος όρων. Η ακολουθία $u_1, u_2, u_3, ...$ συμβολίζεται σύντομα με $\{u_n\}$.

Παράδειγμα 1. Το σύνολο των αριθμών 2, 7, 12, 17, …, 32 αποτελεί μια **πεπερασμένη** ακολουθία, της οποίας ο γενικός όρος είναι $u_n = 2 + 5(n-1) = 5n - 3$, ($n = 1, 2, ..., 7$).

Παράδειγμα 2. Το σύνολο των αριθμών 1, 1/3, 1/5, 1/7, … είναι μια **άπειρη** ακολουθία, της οποίας ο γενικός όρος είναι $u_n = 1/(2n-1)$, ($n = 1, 2, ...$).

>---------------<

Θεωρούμε την ακολουθία των πραγματικών αριθμών $\{u_n\}$, ($n = 1, 2, ...$), και σχηματίζουμε μια νέα ακολουθία $\{s_n\}$, ($n = 1, 2, ...$), ως εξής:

$s_1 = u_1$,

$s_2 = u_1 + u_2$, …,

$s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$,…

Η ακολουθία αυτή ονομάζεται **σειρά πραγματικών αριθμών** και οι όροι της **μερικά αθροίσματα**.

Αν το όριο της ακολουθίας $\{s_n\}$, ($n = 1, 2, ...$), υπάρχει, δηλαδή αν $\lim_{n\to +\infty} s_n = S \in \mathbb{R}$, τότε λέμε ότι η σειρά συγκλίνει και το όριο S ονομάζεται **άθροισμα** της σειράς.

Συμβολικά γράφουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = S \qquad ή \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k = S.$$

Αν το όριο της $\{s_n\}$, ($n = 1, 2, \ldots$), δεν υπάρχει ή είναι το $\pm\infty$ τότε λέμε ότι η σειρά αποκλίνει.

Για την σύγκλιση (απόκλιση) των σειρών πραγματικών αριθμών ισχύουν τα επόμενα θεωρήματα:

Θεώρημα 6.4.1: Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots$ συγκλίνει (αποκλίνει) τότε η σειρά $\sum_{n=p}^{\infty} a_n = a_p + a_{p+1} + \ldots$ συγκλίνει (αποκλίνει) και αντίστροφα.

Θεώρημα 6.4.2: Αν οι σειρές $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ και $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ συγκλίνουν τότε συγκλίνει και η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(aa_n + bb_n\right)$ όπου $a, b \in \mathbb{R}$.

Θεώρημα 6.4.3: Αν η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει και η $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνει τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + b_n\right)$ αποκλίνει.

Παρατήρηση: Αν οι σειρές θετικών όρων $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ αποκλίνουν, τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n + b_n\right)$ αποκλίνει, όμως για την σειρά $\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n - b_n\right)$ δεν μπορούμε πάντοτε να βγάλουμε συμπέρασμα λόγω του ότι είναι δυνατόν να είναι της μορφής $\infty - \infty$.

Υπολογισμός αθροίσματος σειρών πραγματικών αριθμών

Λόγω της ποικιλίας των μορφών που έχουν οι σειρές, δεν είναι πάντοτε δυνατόν να υπολογίσουμε το άθροισμά τους. Δύο από τις λίγες μεθόδους που υπάρχουν για τον υπολογισμό του αθροίσματος αφορούν τις Τηλεσκοπικές σειρές και τις Γεωμετρικές σειρές.

Σχέση μεταξύ Γενικευμένων Ολοκληρωμάτων και Σειρών

Ένα γενικευμένο ολοκλήρωμα 1^{ου} είδους της μορφής $\int_0^\infty f(t)dt$ μπορεί να μετατραπεί σε μια σειρά πραγματικών αριθμών. Το ίδιο μπορεί να γίνει και για τα ολοκληρώματα 2^{ου} είδους.

Μπορούμε να διαπιστώσουμε την σύγκλιση ή απόκλιση ενός γενικευμένου ολοκληρώματος ή μιας σειράς πραγματικών αριθμών χωρίς να καταφύγουμε στον υπολογισμό της τιμής του ολοκληρώματος ή του αθροίσματος της σειράς με την βοήθεια ορισμένων κριτηρίων.

Ακολουθίες πραγματικών συναρτήσεων

Οι ακολουθίες των πραγματικών συναρτήσεων ορίζονται με τρόπο ανάλογο των ακολουθιών των πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, η απεικόνιση που ορίζεται από την αντιστοιχία μεταξύ των φυσικών αριθμών και ενός συνόλου πραγματικών συναρτήσεων $\{f_1, f_2, ..., f_n, ...\}$ με κοινό πεδίο ορισμού A, ονομάζεται **ακολουθία πραγματικών συναρτήσεων** και συμβολίζεται με $\{f_n(x)\}$, ($n = 1,2,...$), όπου $x \in A$.

Παράδειγμα

Οι εκφράσεις $f_n(x) = \frac{nx}{1+nx}$ και $g_n(x) = \frac{nx}{n+x}$ με $A = [0,\infty)$, ορίζουν τις ακολουθίες

$\{f_n(x)\} = \left\{\frac{x}{1+x}, \frac{2x}{1+2x}, \frac{3x}{1+3x}, ...\right\}$ και $\{g_n(x)\} = \left\{\frac{x}{1+x}, \frac{2x}{2+x}, \frac{3x}{3+x}, ...\right\}$.

Αντίστοιχα.

- Η γραφική παράσταση των όρων των ανωτέρω ακολουθιών είναι τώρα καμπύλες και όχι σημεία όπως στις ακολουθίες πραγματικών αριθμών.
- Το όριο μιας ακολουθίας συναρτήσεων, αν υπάρχει, είναι μια συνάρτηση.
- Το αποτέλεσμα της σύγκλισης μιας ακολουθίας πραγματικών συναρτήσεων εξαρτάται από την σειρά λήψης των ορίων.
- Δεν είναι πάντα δυνατόν να εναλλάσσουμε τα όρια των μεταβλητών.

Σειρές πραγματικών συναρτήσεων

Αν $\{f_n(x)\}$, ($n = 1,2,...$), μια ακολουθία συναρτήσεων με πεδίο ορισμού A, η αντίστοιχη σειρά ορίζεται ως εξής

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \lim_{x\to\infty}\left[f_1(x)+\ldots+f_n(x)\right] = \lim_{x\to\infty} S(x),$$

όπου

$$S_n(x) = f_1(x)+\ldots+f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

η ακολουθία των μερικών αθροισμάτων της $\{f_n(x)\}$.

Αν το όριο της ακολουθίας $\{S_n(x)\}$, ($n = 1, 2, \ldots$), των μερικών αθροισμάτων υπάρχει για κάθε x που ανήκει σ' ένα υποσύνολο J του A και είναι η συνάρτηση F(x), τότε την συνάρτηση αυτή την ονομάζουμε **άθροισμα της σειράς**.