

ΜΑΘΗΜΑ: ΕΙΔΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΗ ΕΞΕΤΑΣΤΕΑΣ ΥΛΗΣ

Η προς εξέταση ύλη του μαθήματος είναι:

ΜΕΡΟΣ Α

Οι παραδόσεις του μαθήματος και από το βιβλίο «ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ», Εκδόσεις Μπένου, 2023, των κ.κ. Β. Λουκόπουλου και Γ. Καραχάλιου:

ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΦΥΣΙΚΗΣ

ΕΙΣΑΓΩΓΙΚΟ ΚΕΦΑΛΑΙΟ

A: Σειρές Fourier

1	Ορισμός της Σειράς Fourier.....	13
2	Ικανές συνθήκες για ανάπτυξη μιας συνάρτησης σε σειρά Fourier.....	17
3	Ανάλυση Fourier για Άρτιες και Περιττές συναρτήσεις.....	25
4	Σειρές ημιτόνων και συνημιτόνων.....	26
5	Μιγαδική μορφή των σειρών Fourier.....	36
6	Εφαρμογές.....	37

B: Ολοκλήρωμα Fourier και εφαρμογές

1	Η ανάγκη για το ολοκλήρωμα Fourier.....	44
2	Το ολοκλήρωμα Fourier.....	44
3	Ισοδύναμες μορφές του ολοκληρωτικού θεωρήματος του Fourier.....	45
4	Ο μετασχηματισμός Fourier.....	46
5	Ημιτονοειδής και συνημιτονοειδής μετασχηματισμός Fourier.....	47
6	Ταυτότητες του Parseval για ολοκληρώματα Fourier.....	47
7	Το θεώρημα της συνελίξεως για μετασχηματισμένες Fourier.....	48
8	Εφαρμογές των ολοκληρωμάτων Fourier.....	49

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΡΩΤΟ

Παραγωγή των βασικών εξισώσεων της Μαθηματικής Φυσικής

1.1	Εισαγωγικές έννοιες.....	53
1.2	Αυθαίρετες συναρτήσεις. Το μονοδιάστατο κύμα.....	61
1.3	Η διαφορική εξίσωση του κύματος σε ελαστικό μέσο.....	64
	α) Εγκάρσια ταλάντωση ελαστικής χορδής.....	64
	β) Ταλάντωση ελαστικής χορδής με απόσβεση.....	70
	γ) Εγκάρσια ταλάντωση ελαστικής μεμβράνης.....	71
	δ) Η εξίσωση του διαμήκους κύματος σε ράβδο ή ελατήριο.....	73
	ε) Η εξίσωση της ενεργείας του εγκαρσίου κύματος σε χορδή.....	74
	στ) Η εξίσωση του εγκαρσίου κύματος σε πρισματική ράβδο.....	76
1.4	Η διαφορική εξίσωση της κατανομής της θερμοκρασίας.....	77
	α) Κατανομή της θερμοκρασίας σε ράβδο.....	77
	β) Κατανομή της θερμοκρασίας σε δύο ή σε τρεις διαστάσεις.....	81
1.5	Η εξίσωση της κίνησης ρευστού.....	86
	α) Η εξίσωση της συνεχείας.....	86
	β) Η εξίσωση της κίνησης ιδανικού ρευστού.....	87
	γ) Δυναμικό ταχύτητας.....	88
	δ) Η διάχυση του ιξώδους.....	89
1.6	Η εξίσωση της διάχυσης.....	90
	α) Η εξίσωση της διάχυσης διαλελυμένης ουσίας εντός διαλύτη.....	90
	β) Η εξίσωση της διάχυσης αερίου εντός πορώδους μέσου.....	92
1.7	Η εξίσωση της διάδοσης του ήχου στον αέρα.....	93
1.8	Καλώς τοποθετημένο πρόβλημα. Η μέθοδος των χωριζομένων Μεταβλητών. Συντελεστές Fourier.....	96
1.9	Η ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων $X_n(x)$	104

Επίλυση εξισώσεων υπερβολικού τύπου σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΔΕΥΤΕΡΟ
Εξισώσεις υπερβολικού τύπου

2.1	Αρχικές και συνοριακές συνθήκες.....	107
2.2	Το θεώρημα της μοναδικότητας της λύσης.....	109
2.3	Η κυματική εξίσωση σε χορδή με σταθερά άκρα.....	111
	α) Το στάσιμο κύμα. Η ομογενής εξίσωση.....	111
	β) Η στιγμιαία σημειακή πηγή ταλαντώσεων.....	116
	γ) Ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων $X_n(x)$	118
2.4	Η μη ομογενής εξίσωση του κύματος σε χορδή πεπερασμένου μήκους. Η μέθοδος των ιδιοσυναρτήσεων.....	120
	α) Ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Η στιγμιαία ώθηση.....	120
	β) Μόνιμες μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.....	125
	γ) Χρονοεξαρτώμενες μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.....	126
	δ) Λυμένα παραδείγματα.....	127
2.5	Η συνάρτηση δ	133
	α) Ορισμός της συνάρτησης δ	133
	β) Λογισμός της συνάρτησης δ	135
	γ) Ανάλυση της συνάρτησης δ υπό μορφή σειράς Fourier.....	138
2.6	Ταλάντωση χορδής πεπερασμένου μήκους υπό την επίδραση δυνάμεως ασκουμένης σε σημείο της χορδής.....	141
2.7	Εγκάρσιες ταλαντώσεις ορθογωνίου ελαστικής μεμβράνης. Διπλή σειρά Fourier.....	144
	α) Η ομογενής εξίσωση.....	144
	β) Η μη ομογενής εξίσωση. Η μέθοδος των ιδιοσυναρτήσεων.....	147
	γ) Η στιγμιαία σημειακή πηγή ταλαντώσεων.....	150
2.8	Εγκάρσιες ταλαντώσεις κυκλικής μεμβράνης. Η κυματική εξίσωση σε πολικές συντεταγμένες.....	152
2.9	Η κυματική εξίσωση σε σφαιρικές συντεταγμένες. Σφαιρικά κύματα.....	159
2.10	Οι διαμήκεις ταλαντώσεις πρισματικής ράβδου $0 \leq x \leq L$	163
	α) Διαμήκεις ταλαντώσεις ράβδου με σταθερό το ένα άκρο αυτής.....	163
	β) Μόνιμες εξαναγκασμένες διαμήκεις ταλαντώσεις ράβδου.....	163
	γ) Εξαναγκασμένες διαμήκεις ταλαντώσεις ράβδου.....	165

Επίλυση εξισώσεων παραβολικού τύπου σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΡΙΤΟ
Εξισώσεις Παραβολικού τύπου

3.1	Η διατύπωση προβλημάτων συνοριακών τιμών.....	211
3.2	Το θεώρημα της μοναδικότητας της λύσης.....	213
	α) Το αξίωμα της μέγιστης τιμής.....	213
	β) Το θεώρημα της μοναδικότητας της λύσης.....	215

3.3	Η ομογενής εξίσωση της θερμοκρασίας ράβδου πεπερασμένου μήκους.....	216
	α) Ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Η συνάρτηση πηγής.....	216
	β) Μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.....	220
	γ) Εφαρμογές.....	222
3.4	Η μη ομογενής εξίσωση της θερμοκρασίας ράβδου πεπερασμένου μήκους Η μέθοδος των ιδιοσυναρτήσεων.....	228
	α) Ομογενείς συνοριακές συνθήκες και αρχική συνθήκη $u(x,0) = 0$ Η συνάρτηση πηγής.....	228
	β) Ομογενείς συνοριακές συνθήκες και αρχική συνθήκη $u(x,0) = \varphi(x)$	232
	γ) Μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.....	235
3.5	Η συνάρτηση πηγής σε ράβδο απείρου μήκους.....	238
3.6	Η εξίσωση της θερμοκρασίας ράβδου απείρου μήκους.....	244
	α) Ράβδος με αρχική συνθήκη $u(x, 0) = \varphi(x)$	244
	β) Ράβδος $0 \leq x < \infty$ με συνοριακή συνθήκη $u(0, t) = A_0 \cos \omega t$ ή $u(0, t) = A_0 \sin \omega t$	248
3.7	Η ομογενής εξίσωση της θερμοκρασίας επιπέδου επιφανείας πεπερασμένων διαστάσεων. Διπλή σειρά Fourier.....	251
	α) Ομογενείς συνοριακές συνθήκες. Η συνάρτηση πηγής.....	251
	β) Μη ομογενείς σταθερές συνοριακές συνθήκες.....	256
3.8	Η μη ομογενής εξίσωση της θερμοκρασίας επιπέδου επιφανείας. Η μέθοδος των ιδιοσυναρτήσεων .Η συνάρτηση πηγής.....	257
	α) Ομογενείς συνοριακές συνθήκες και αρχική συνθήκη $u(x,y,0) = 0$	257
	β) Ομογενείς συνοριακές συνθήκες και αρχική συνθήκη $u(x,y,0) = \varphi(x,y)$	261
	γ) Μη ομογενείς συνοριακές συνθήκες.....	261
3.9	Η συνάρτηση πηγής επίπεδης επιφανείας απείρων διαστάσεων.....	262
3.10	Η εξίσωση της θερμοκρασίας επίπεδης επιφανείας απείρων διαστάσεων με αρχική συνθήκη $u(x, y, 0) = \varphi(x,y)$	268
3.11	Χρονική κατανομή της θερμοκρασίας κυκλικής επιφανείας.....	269
3.12	Η χρονική κατανομή της θερμοκρασίας σε κύλινδρο πεπερασμένου ύψους..	271
3.13	Η χρονική κατανομή της θερμοκρασίας σε κύλινδρο με θερμικές απώλειες.....	274
3.14	Χρονική κατανομή της θερμοκρασίας σε σφαίρα.....	275

Επίλυση εξισώσεων παραβολικού τύπου σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΤΕΤΑΡΤΟ Εξισώσεις ελλειπτικού τύπου

4.1	Η Εξίσωση του Laplace.....	298
	α) Η Εξίσωση του Laplace σε καρτεσιανές συντεταγμένες.....	298
	β) Ορθογωνιότητα των ιδιοσυναρτήσεων στο γενικό πρόβλημα συνοριακών τιμών.....	300
4.2	Η εξίσωση του Laplace σε πολικές συντεταγμένες.....	305

4.3 Η εξίσωση του Laplace σε κυλινδρικές συντεταγμένες.....	309
4.4 Η εξίσωση του Laplace σε σφαιρικές συντεταγμένες.....	312
4.5 Γενικές ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων. Η ολοκληρωτική σχέση του Green.....	324
α) Ειδικές λύσεις της εξίσωσης του Laplace.....	324
β) Ο αντίστροφος μετασχηματισμός.....	326
γ) Το θεώρημα του Green.....	327
δ) Η θεμελιώδης ολοκληρωτική σχέση του Green.....	329
ε) Θεμελιώδεις ιδιότητες των αρμονικών συναρτήσεων.....	334
στ) Το θεώρημα του μεγίστου.....	337
ζ) Το θεώρημα της μοναδικότητας της λύσης.....	338
4.6 Η συνάρτηση πηγής στον τρισδιάστατο χώρο για την εξίσωση του Poisson $\nabla^2 u = -F(x,y,z)$ και για την εξίσωση του Laplace $\nabla^2 u = 0$ με συνοριακή συνθήκη $u(S)=\varphi(x,y,z)$	339
4.7 Η συνάρτηση πηγής στον δισδιάστατο χώρο για την εξίσωση του Poisson $\nabla^2 u = -F(x,y)$ και για την εξίσωση του Laplace $\nabla^2 u = 0$ με συνοριακή συνθήκη $u(C)=\varphi(x,y)$	342
4.8 Παραδείγματα προσδιορισμού της συνάρτησης Green. (Η μέθοδος των ειδώλων).....	344
4.9 Η χρήση της συνάρτησης πηγής για την επίλυση του προβλήματος $\nabla^2 u = 0$ σε σφαίρα με συνοριακή συνθήκη $u(S)=\varphi(x,y,z)$. Το ολοκλήρωμα Poisson.....	351
4.10 Η χρήση της συνάρτησης πηγής για την επίλυση του προβλήματος $\nabla^2 u = 0$ στον κύκλο με συνοριακή συνθήκη $u(C)=\varphi(x,y)$. Το ολοκλήρωμα Poisson.....	353
4.11 Η Εξίσωση του Helmholtz.....	354
4.12 Το πρόβλημα του Neumann.....	358

Επίλυση εξισώσεων ελλειπτικού τύπου σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ ΠΕΜΠΤΟ

Το ολοκλήρωμα Fourier. Μετασχηματισμοί Fourier

5.1. Το Ολοκλήρωμα Fourier.....	382
α) Το ολοκλήρωμα Fourier υπό τριγωνομετρική μορφή.....	382
β) Το ολοκλήρωμα Fourier υπό μιγαδική μορφή.....	387
5.2. Εφαρμογές του ολοκληρώματος Fourier.....	388
5.3. Διάδοση κύματος κατά μήκος ελαστικής χορδής απείρου μήκους.....	399
5.4. Σημειακή Πηγή Θερμότητας.....	400
5.5. Στιγμιαία Πηγή Φωτός.....	403
5.6. Μετασχηματισμοί Fourier.....	403

Επιπροσθέτως:

- Επίλυση ΜΔΕ με την βοήθεια ολοκληρωτικών μετασχηματισμών (Μετασχηματισμοί Fourier)
- Επίλυση ΜΔΕ με την βοήθεια της συνάρτησης Green.
- Επίλυση μη γραμμικών ΜΔΕ. Μέθοδος ομοιότητας. Μέθοδος διαταραχών.
- Προβλήματα Ιδιοτιμών και Ειδικές Συναρτήσεις. Το πρόβλημα των ιδιοτιμών $Ly=\lambda y$. Θεωρία Sturm-Liouville.

- ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ
- ΣΕΙΡΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΜΕΡΟΣ Β

Από τις Πανεπιστημιακές Σημειώσεις «**ΜΙΓΑΔΙΚΗ ΑΝΑΛΥΣΗ**», του κ. Δ. Σουρλά:

- Μιγαδικοί αριθμοί.
- Μιγαδικές συναρτήσεις.
- Παραγωγή μιγαδικής συνάρτησης.
- Μιγαδική ολοκλήρωση.
- Οι ολοκληρωτικοί τύποι του Cauchy και σχετικά θεωρήματα.
- Σειρές Taylor-Laurent και ολοκληρωτικά υπόλοιπα.

Η ύλη της «**ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ**» παρουσιάζεται αναλυτικά στο αρχείο «[ΕΞΕΤΑΣΤΕΑ ΥΛΗ ΜΙΓΑΔΙΚΗΣ ΑΝΑΛΥΣΗΣ 2023-24](#)».

Αντίστοιχη ύλη ισχύει και για τα υπόλοιπα συγγράμματα που προτείνονται.