Μηχανική των Ρευστών

Ενότητα 9: Ασκήσεις

Βασίλειος Λουκόπουλος, Επίκουρος Καθηγητής

Τμήμα Φυσικής

Άδειες Χρήσης

Χρηματοδότηση

- Το παρόν εκπαιδευτικό υλικό έχει αναπτυχθεί στα πλαίσια του εκπαιδευτικού έργου του διδάσκοντα.
- Το έργο «**Ανοικτά Ακαδημαϊκά Μαθήματα στο Πανεπιστήμιο Πατρών**» έχει χρηματοδοτήσει μόνο τη αναδιαμόρφωση του εκπαιδευτικού υλικού.
- Το έργο υλοποιείται στο πλαίσιο του Επιχειρησιακού Προγράμματος «Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση» και συγχρηματοδοτείται από την Ευρωπαϊκή Ένωση (Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο) και από εθνικούς πόρους.

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Ενότητα 1: Εισαγωγικές Έννοιες –Ορισμοί

Άσκηση

Ελέγξτε ως προς την διαστατική ομοιογένεια τις παρακάτω εξισώσεις :

(α) $Q = A.V$

(β) $V = \sqrt{2gH}$

(γ) $P = \dfrac{wQ.H}{75}$

Λύση :

(α) Λαμβάνοντας υπόψη τα μεγέθη των ποσοτήτων Q, A και V από τον πίνακα 2.1.1

$Q = A.V$ $M^0 L^3 T^{-1} = [M^0 L^2 T^0][M^0 L T^{-1}] = M^0 L^3 T^{-1}$

Εφόσον τα μεγέθη και αριστερά και δεξιά της εξίσωσης είναι ισοδύναμα, η δοθείσα εξίσωση είναι ομοιογενής.

(β) Ακολουθώντας την ίδια διαδικασία,

$V = \sqrt{2gH}$

$M^0 L T^{-1} = \sqrt{[M^0 L T^{-2}].[M^0 L T^0]} = \sqrt{M^0 L^2 T^{-2}} = M^0 L T^{-1}$

Επομένως η δοθείσα εξίσωση είναι ομοιογενής.

(γ) $P = \dfrac{w\,Q.H}{75}$

$M L^2 T^{-3} = [M L^{-2} T^{-2}].[M^0 L^3 T^{-1}][M^0 L T^0] = M L^2 T^{-3}$

Άσκηση

Η ταχύτητα u ft/sec του νερού ρέοντας σ` ένα κανάλι με κλίση i και το βάθος m σε ft, δίνεται από ,

u = 90,6 $\sqrt{mi}$, με FPS σύστημα μονάδων.

Βρείτε τον ανάλογο τύπο σε MKS σύστημα μονάδων.

Λύση :

Έστω u = C $\sqrt{mi}$

Ο διαστατικός τύπος της δοθείσας εξίσωσης είναι,

$$LT^{-1} = C[L\times 1]^{1/2} = C[L]^{1/2}$$

Προφανώς η εξίσωση αυτή δεν είναι διαστατικά ομοιογενής. Γι αυτό όταν αλλάζει το σύστημα μονάδων (π.χ. απο Μετρικό σε Αγγλοσαξωνικό) αλλάζει η σταθερά C .

$$\therefore C = \frac{LT^{-1}}{L^{1/2}} = L^{1/2}T^{-1}$$

Δίνεται : u = 90.6 $\sqrt{mi}$ σε FPS σύστημα μονάδων.

Εχομε ότι Τώρα 1 Ft=0.3048m και το T έχει ίδιες μονάδες και στα δύο συστήματα

C(M.K.S.) = $(0,3084)^{1/2}$ C(F.P.S.) = $(0,3084)^{1/2}$ □ 90,6 = 50

Άρα ο ανάλογος τύπος στο MKS σύστημα μονάδων είναι,

u = 50 $\sqrt{mi}$

Ενότητα 2: Στατική των ρευστών

Ασκηση

Υποθέτουμε ότι η πίεση P και η πυκνότητα ρ του ατμοσφαιρικού αέρα συνδέονται από την σχέση $P = k\rho$, όπου K=σταθ. και επιπλέον ότι η επιτάχυνση της βαρύτητας έχει σταθερή τιμή g. Να δείξετε ότι η ατμοσφαιρική πίεση P(z) σε ένα ύψος z πάνω από την επιφάνεια της γης δίνεται από την σχέση

$$P(z) = P(0)e^{-g/_k k}$$

Κατόπιν τούτου εάν μια φυσαλίδα γεμάτη με από ένα αέριο του οποίου η πίεση P και η πυκνότητα ρ ικανοποιούν την σχέση $P = k'\rho$, όπου k'=σταθ. και k'>k, ανυψώνεται από την επιφάνεια της γης, δείξετε ότι το έργο που παράγεται από την μονάδα μάζας του αερίου αυτού κατά την διαστολή του όταν η φυσαλίδα ανέρχεται σε ύψος z είναι k'/k.

Λύση:

Η καθολική δύναμη που επενεργεί σε κάθε στοιχείο του αέρα είναι μόνο το βάρος του. Συνεπώς η ανά μονάδα μάζας δύναμη είναι $F = -gk$ και οι εξισώσεις κίνησης ισορροπίας γράφονται:

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{x}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{y}} = 0$$

$$\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial \mathrm{z}} = -g\rho$$

απ' όπου έπεται ότι P=P(z) και $\frac{\mathrm{dP}}{\mathrm{d}z} = -\rho g$ (**1**).

Από την σχέση $P = k\rho$ έχουμε $\rho = \frac{P}{k}$ οπότε η σχέση 1 γίνεται

$$\frac{dP}{dz} = \frac{P}{k}\rho$$

Οπότε θα έχουμε

$$\frac{dP}{P} = -\frac{1}{k} g\, dz \quad \text{και} \quad \int_{P(0)}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{g}{k} \int_0^z dz$$

Οπότε

$$P(z) = P(0) e^{-g/_k k}$$

Θεωρούμε τώρα ότι σε κάθε σημείο της κατακόρυφης κίνησης της φυσαλίδας μέσα στην ατμόσφαιρα η φυσαλίδα διαστέλλεται κατά τέτοιο τρόπο ώστε η πίεση μέσα σε αυτήν και η εκάστοτε ατμοσφαιρική πίεση στο εκάστοτε ύψος να είναι ίσες. Από την ισότητα των πιέσεων αερίου και αέρα και αφού k'>k ' έπεται ότι η πυκνότητα του αερίου του αερίου είναι μικρότερη από την πυκνότητα του αέρα και συνεπώς η φυσαλίδα δέχεται μια άνωση σύμφωνα με την γνωστή αρχή του Αρχιμήδη. Σε ένα ορισμένο ύψος z η πίεση της ατμόσφαιρας είναι :

$$P(z) = P(0) e^{-g/_k k}$$

Και συνεπώς η πυκνότητα του αερίου θα είναι

$$\rho = {}^{P(z)}/_{k'} = {}^{P(0)}/_{k'}\, e^{g/_{k'} z}$$

Ο όγκος που καταλαμβάνεται από την μονάδα μάζας του αερίου είναι $V = {}^{1}/_{\rho}$ και το έργο που παράγεται από την πίεση κατά την διάρκεια της διαστολής του αερίου που αντιστοιχεί σε μεταβολή της πυκνότητάς του κατά dp είναι :

$$dW = PdV = Pd(1/\rho) = -P/\rho^2\, dp$$

$$W = \int_{\rho(0)}^{\rho(z)} -P/\rho^2\, dp = \frac{k'}{k} gz$$

Ενότητα 3: Κινηματική των ρευστών

Άσκηση

Αν οι τροχιές των υλικών σημείων ενός συνεχούς μέσου δίνονται από την σχέση $x = x_0(1+t) + 3t^2 + 5t^3$, να βρεθεί η επιτάχυνση κατά Lagrange και Euler.

Λύση:

Παρατηρούμε ότι για $t = t_0 = 0$ το τυχόν ρευστό σωματίδιο βρίσκεται στην θέση $x = x_0$.
Επειδή $x = x_0(1+t) + 3t^2 + 5t^3$ (1) η ταχύτητα αυτού κατά Lagrange θα είναι

$$u(x_0, t) = \frac{dx}{dt} = x_0 + 6t + 15t^2 \text{ (2)}$$

Δηλαδή η ταχύτητα είναι συνάρτηση του χρόνου t και της αρχικής θέσεως x_0 και εκφράζεται σαν ιδιότητα σαν ιδιότητα εκείνου του ρευστού σωματιδίου που την στιγμή $t = 0$ κατέχει την θέση $x = x_0$.
Κατά Euler τη ταχύτητα u θα πρέπει να είναι συνάρτηση της θέσεως x και του χρόνου t. Δηλαδή $u = u(x, t)$. Εκφράζεται η ταχύτητα u σαν ιδιότητα του σημείου x στο χώρου (όχι του ρευστού σωματιδίου) και του χρόνου t. Άρα

$$u(x, t) = \frac{dx}{dt} = x_0 + 6t + 15t^2 \quad (3)$$

Λύνοντας όμως την ως προς x_0 παίρνουμε $x_0 = {(x - 3t^2 - 5t^3)}\big/{(1+t)}$

και αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε τελικά

$$u(x, t) = {x - 3t^2 - 5t^3}\big/{1+5} + 6t + 15t^2$$

Η επιτάχυνση τώρα κατά Lagrange είναι

$$a_x = {d^2x}\big/{dt^2} = 6 + 30t$$

Ενώ κατά Euler

$$a_x = \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 6 + 30t$$

Παρατηρούμε ότι και στις δυο μεθόδους η επιτάχυνση a_x εξαρτάται μόνο από τον χρόνο t.

Άσκηση

Οι συντεταγμένες της ταχύτητος **q** σ' ένα πεδίο ροής δίνονται από τις σχέσεις

$$u = k_1 x e^{-k_3 t}, \qquad v = k_2 y \quad \text{και} \quad w = 0$$

1) Να ευρεθεί η εξίσωση της οικογένειας των ρευματικών γραμμών όταν $k_1 = k_2 = k_3 = 1$ (sec^{-1})
2) Ποιος είναι ο δρόμος του ρευστού σωματιδίου που κατά την στιγμή $t = 0$ κατέχει την θέση (x_0, y_0)
3) Να βρεθεί η εξίσωση των ακολουθιών για εκείνα τα ρευστά σωματίδια που πέρασαν από το σημείο $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$.

Λύση

1) Επειδή $w = 0$ η κίνηση του ρευστού είναι δισδιάστατη και η διαφορική εξίσωση των ρευματικών γραμμών γράφεται

$$dx/_u = {dy}/_v \quad \text{ή} \quad dx/_{xe^{-t}} = {dy}/_y$$

και η ολοκλήρωση γίνεται με την προϋπόθεση ότι $t = σταθ.$ Οπότε

$$dx/_x\, e^t = {dy}/_y \Rightarrow y = cx^{e^t} \quad (1)$$

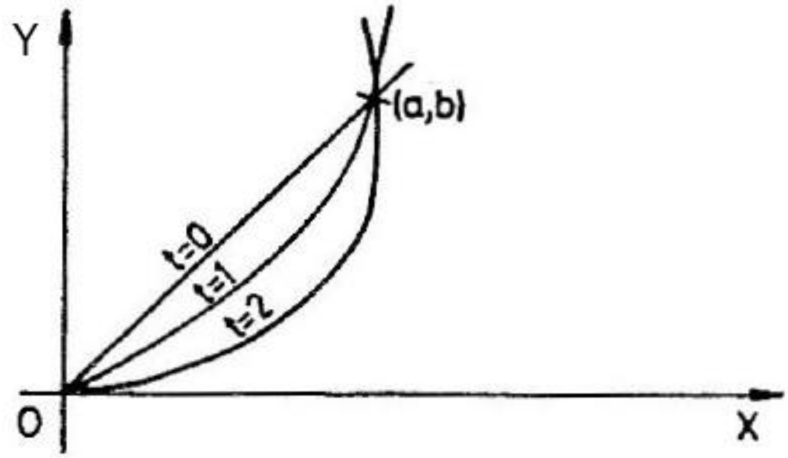
Η εξίσωση (1) είναι η εξίσωση της οικογένειας των ρευματικών γραμμών που αντιστοιχεί στο δοθέν πεδίο ταχυτήτων. Παρατηρούμε ότι οι καμπύλες αυτές για οποιοδήποτε δοθείσα χρονική στιγμή διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Για τον υπολογισμό της σταθεράς C θα πρέπει να γνωρίζουμε ένα σημείο από το οποίο διέρχονται από την αρχή των αξόνων. Για τον υπολογισμό σταθεράς C θα πρέπει να γνωρίζουμε ένα σημείο από το οποίο διέρχονται οι ρευματικές γραμμές. Π.χ. αν αυτές διέρχονται από το σημείο (a,b) θα έχουμε

$$b = ca^{e^t} \ \text{ οπότε } \ c = b/_{a^{e^t}}$$

και η γράφεται

$$y = {}^{b}\!/_{a^{e^t}}\, x^{e^t} \qquad \text{ή} \qquad y = b({}^{x}\!/_{a})^{e^t}$$

Το κάτωθι Σχήμα δείχνει τρείς διαφορετικές ρευματικές γραμμές που διέρχονται από το σημείο (a, b) για τρεις διαφορετικές χρονικές στιγμές.



2) Για την εύρεση της εξισώσεως δρόμου του ρευστού σωματιδίου που την χρονική στιγμή t=0 κατέχει την θέση (x_0, y_0). Εκφράζουμε τις συντεταγμένες του x, y την τυχούσα χρονική στιγμή t σαν συναρτήσεις του χρόνου t αλλά και της αρχικής θέσης (x_0, y_0) δηλαδή βρίσκουμε τις $x = x(x_0, t)$ $y = y(y_0, t)$ και μεταξύ των αυτών απαλείφουμε τον χρόνο t. Πράγματι :

$$\frac{dx}{dt} = u = xe^{-t} \qquad \frac{dx}{x} = e^{-t}dt \qquad \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^t e^{-t}\, dt$$

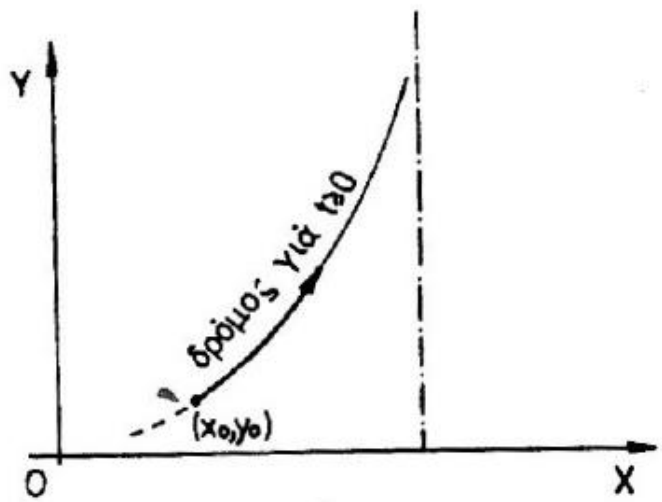
η

$$\frac{dy}{dt} = u = y \qquad \frac{dy}{y} = dt \qquad \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y} = \int_0^t dt$$

Απ' όπου παίρνουμε $x = x_0 e^{1-e^{-t}}$ και $y = y_0 e^t$ και η απαλοιφή μεταξύ αυτών δίνει

$$y = \frac{y_0}{1 - \ln({}^{x_0}/_{y_0})}$$

Που είναι η εξίσωση του δρόμου όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.



3) Όπως ορίσαμε και στην θεωρία, ακολουθίες είναι οι καμπύλες εκείνες που αποτελούνται από εκείνα τα ρευστά σωματίδια που πέρασαν σε παρελθόντα χρόνο από το ίδιο σημείο (a, b) του πεδίου ροής.

Οι παραμετρικές εξισώσεις δρόμου είναι :

$$x = x_0 e^{1-e^{-t}} \qquad \text{και} \qquad y = y_0 e^t$$

Οι εξισώσεις αυτές δίνουν :

$$x_0 = \frac{x}{e^{1-e^{-t}}} \qquad \text{και} \qquad y_0 = \frac{b}{e^t}$$

Τα ρευστά λοιπόν που πέρασαν από το σημείο $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{i} + b\boldsymbol{j}$ σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή τ με 0 ≤ τ ≤ t, είναι :

$$x_0 = \frac{x}{e^{1-e^{-\tau}}} \qquad \text{και} \qquad y_0 = \frac{b}{e^\tau} \qquad \text{με } 0 \le \tau \le t.$$

Για μα βρούμε τώρα την εξίσωση της ακολουθίας αντικαθιστούμε τα x_0, y_0 στις παραμετρικές εξισώσεις του δρόμου. Έχουμε λοιπόν :

Η λύση αυτή είναι της μορφής $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}_0((a,b),\tau),t)$ και για την εύρεση της ακολουθίας των ρευστών σωματιδίων για ένα χρονικό διάστημα [0, t] απαιτείται ο υπολογισμός των x, y. Απαλοίφωντας το e^{τ} από τις παραπάνω εξισώσεις παίρνουμε την εξίσωση της ζητούμενης ακολουθίας.

$$\ln\frac{x}{a} = e^{-\tau}(1 - \frac{b}{y})$$

Ενότητα 4: Εξίσωση συνεχείας και ροϊκήσυνάρτηση

Άσκηση

Οι συντεταγμένες της ταχύτητας V σε ένα πεδίο ροής ασυμπίεστου και ομογενούς ρευστού, είναι:

$$u = -c^2\frac{y}{r^2}$$
$$v = c^2\frac{x}{r^2}$$
$w = 0$ όπου c=σταθ. και $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$

i) Εξετάστε εάν η κίνηση αυτή είναι δυνατή.
ii) Βρείτε τις ρευματικές γραμμές.
iii) Εξετάστε εάν υπάρχει δυναμικό ταχύτητας και αν υπάρχει βρείτε τις επιφάνειες που τέμνουν κάθετα τις ρευματικές γραμμές

Λύση

Παρατηρούμε ότι w=0. Κατά συνέπια η κίνηση του ρευστού είναι επίπεδη. Για να είναι δυνατή η κίνηση θα πρέπει οι u και v να ικανοποιούν την εξίσωση της συνέχειας. Επειδή το ρευστό είναι ομογενές και ασυμπίεστο η εξίσωση αυτή, όπως είναι γνωστό είναι :

$$x = \frac{a}{e^{1-e^{-t}}}\ e^{1-e^{-t}} \quad \text{και} \quad y = \frac{be^{t}}{e^{t}}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{V}=0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad \text{ή} \quad \frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

Αλλά

$$\frac{\partial u}{\partial x}={2c^2xy}/{r^4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}={-2c^2xy}/{r^4}$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει ότι $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$ και συνεπώς ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας.

Η διαφορική εξίσωση των ρευματικών γραμμών είναι

$$\frac{dx}{u}=\frac{dy}{v}=\frac{dz}{w} \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{-c^2y/_{r^2}}=\frac{dy}{c^2y/_{r^2}} \quad \text{ή} \quad \frac{dx}{-y}=\frac{dy}{x}$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει ότι $xdx+ydy=0$ και $dz=0$. Δηλαδή $x^2+y^2=\sigma\tau\alpha\theta.$ και $z=\sigma\tau\alpha\theta.$ Οι ρευματικές γραμμές είναι κύκλοι που ορίζονται σαν τομές κυλινδρικών επιφανειών σταθερής ακτίνας και άξονα τον 0Z και των επιπέδων $z=\sigma\tau\alpha\theta.$

Για να υπάρχει δυναμικό της ταχύτητας θα πρέπει ο στροβιλισμός του πεδίου ταχυτήτων να **V** να είναι μηδενικός. Δηλαδή $\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V}=0$. Πράγματι

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{V}=\begin{matrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ u & v & w\end{matrix}=0$$

Άρα υπάρχει συνάρτηση $\Phi=\Phi(x,y,z)$ που είναι το δυναμικό της ταχύτητας τέτοια ώστε

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathrm{x}}=-u, \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial y}=-v \quad \kappa\alpha\iota \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial z}=0$$

Οι επιφάνειες που τέμνουν κάθετα τις ρευματικές γραμμές θα προσδιοριστούν από την διαφορική εξίσωση

$$udx+vdy+wdz=0$$

$$-\frac{c^2 y}{r^2}dx + \frac{c^2 x}{r^2}dy = 0$$

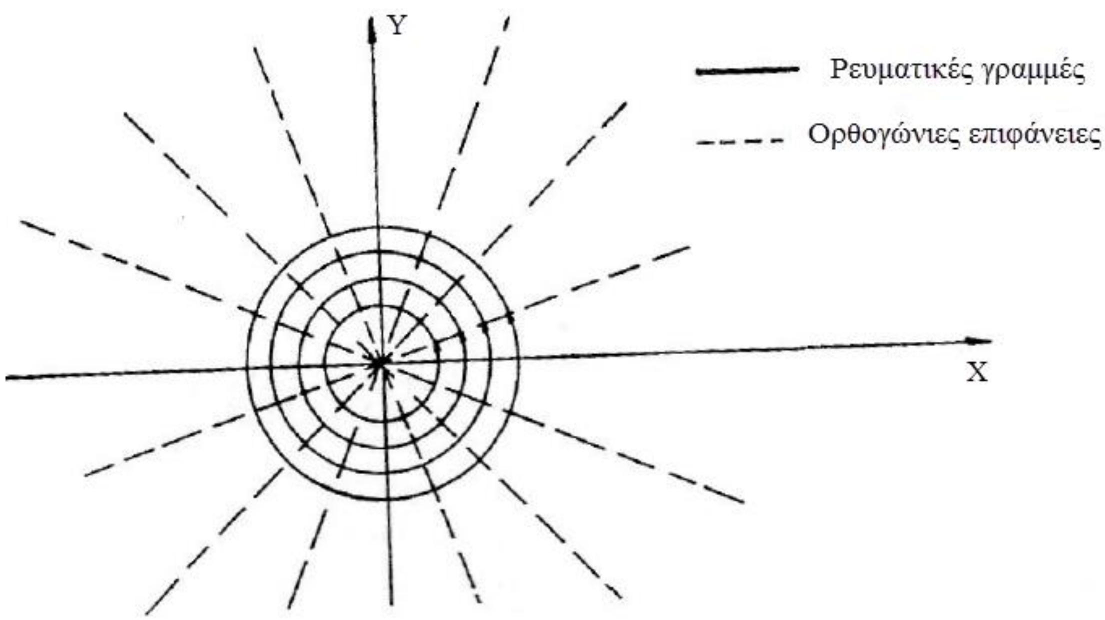
Μπορούμε να γράψουμε

$$-\frac{c^2 y}{x^2+y^2}dx + \frac{c^2 x}{x^2+y^2}dy = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{c^2 x}{x^2+y^2}(xdy - ydy) = 0$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $x^2 + y^2 = \sigma\tau\alpha\theta$. Συνεπώς από την παραπάνω εξίσωση θα έχουμε

$$(xdy - ydy) = 0 \rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} \quad \text{ή} \quad \ln y = \ln x + c$$

δηλαδή $y = cx$ (c=σταθ.). Οι ορθογώνιες λοιπόν επιφάνειες των ρευματικών γραμμών είναι τα επίπεδα που διέρχονται από τον άξονα των z, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Άσκηση

Το πεδίο ταχυτήτων **q** ενός ομογενούς και ασυμπίεστου ρευστού δίνεται από την σχέση $\boldsymbol{q} = 3x^2y\boldsymbol{i} + 2yx\boldsymbol{j} - 3x^2z^3$. Ικανοποιεί αυτό την εξίσωση συνέχειας ; Εάν όχι να υπολογισθεί η w συνιστώσα για να ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας.

Λύση

Η εξίσωση συνέχειας στην περίπτωση αυτή είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0$$

Από το πεδίο ταχυτήτων που μας έχει δοθεί έχουμε

$$u=3x^2y, v=2yz\ \ \kappa\alpha\iota\ \ w=-3x^2z^3$$

Από το οποίο παίρνουμε

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=6xy+2z-9x^2z^2\neq 0$$

Άρα δεν ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας.

Για να ικανοποιείται η εξίσωση συνέχειας θα πρέπει :

$$\frac{\partial w}{\partial z}=-\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=-6xy-2z$$

Οπότε

$$W(x,y,z)=-\int 6xyz\,dz-\int 2z\,dz+f(x,y)$$

ή $$W(x,y,z)=-6xyz-z^2+f(x,y)$$

όπου f(x, y) είναι τυχούσα συνάρτηση των μεταβλητών x και y. Πράγματι το πεδίο ροής

$$\boldsymbol{q}=3x^2y\boldsymbol{i}+2yx\boldsymbol{j}+\left(-6xyz-z^2+f(x,y)\right)\boldsymbol{k}$$

ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας.

Ενότητα 6: Ιδανικά ρευστά – Εξισώσεις κινήσεως και ολοκληρώματα αυτών

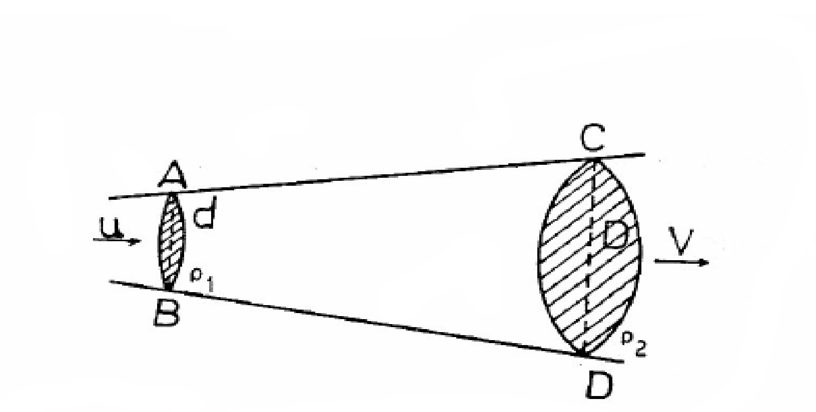
Άσκηση

Ατμός κινείται δια μέσου ενός κωνικού αγωγού του οποίου οι δυο κυκλικές βάσεις έχουν διαμέτρους D και d αντιστοίχως. Εάν V και v είναι οι αντίστοιχες ταχύτητες του ατμού στις διατομές αυτές δείξτε ότι :

$$\frac{v}{V} = \frac{D^2}{d}\ e^{(u^2 - v^2)/_{2k}}$$

όπου k είναι ο λόγος της πιέσεως προς την πυκνότητα και είναι σταθερός.

Λύση



Έστω ρ_1 και ρ_2 οι πυκνότητες του ατμού στις δυο διατομές. Από την αρχή διατηρήσεως της μάζας, η μάζα του ατμού που εισέρχεται από την διατομή AB και εκείνη που εξέρχεται από την CD είναι ίσες. Άρα

$$\pi(\frac{1}{2}d)^2 v\rho_1 = \pi(\frac{1}{2}D)^2 V\rho_2$$

Ή

$$\frac{v}{V} = (\frac{D}{d})^2 \frac{\rho_1}{\rho_2}$$

Έστω P η πίεση, u η ταχύτητα και ρ η πυκνότητα του ατμού σε μια απόσταση r από την AB. Η εξίσωση Euler για σταθερή ροή και για μηδενικό πεδίο καθολικών δυνάμεων είναι :

$$u\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P}{\partial r}$$

Επειδή $\frac{P}{\rho} = k$ έχουμε $P = k\rho$ και κατά συνέπια

$$\frac{\partial P}{\partial r} = k\frac{\partial \rho}{\partial r}$$

Οπότε

$$u\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}k\frac{\partial \rho}{\partial r} = -\frac{k}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial r}$$

Επειδή έχουμε σταθερή ροή έπεται ότι $u = u(r)$ και $\rho = \rho(r)$ οπότε :

$$u\frac{du}{dr} = -\frac{k}{\rho}\frac{d\rho}{dr}$$

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση παίρνουμε :

$$\frac{1}{2}u^2 = -k\ln\frac{E}{\rho} \quad \text{ή} \quad \rho = Ee^{-\frac{u^2}{2k}}$$

Επειδή $\rho = \rho_1$ όταν $u = v$ η παραπάνω σχέση δίνει :

$$\rho_1 = Ee^{-\frac{v^2}{2k}}$$

Για την διατομή CD αντίστοιχα

$$\rho_2 = \ Ee^{-\frac{V^2}{2k}}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{e^{-\frac{v^2}{2k}}}{e^{-\frac{V^2}{2k}}} = e^{(v^2-V^2)/_{2k}}$$

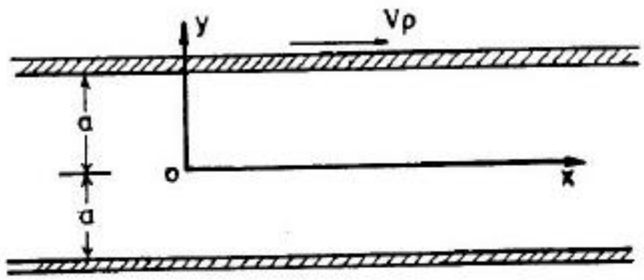
Αντικαθιστώντας τον λόγο των πυκνοτήτων παίρνουμε

$$\frac{v}{V} = \frac{D^2}{d^2}e^{(v^2-V^2)/_{2k}}$$

Ενότητα 7: Πραγματικά ρευστά – Κινηματικές εξισώσεις αυτών

Άσκηση

Ένα ασυμπίεστο ιξώδες ρευστό, με σταθερό ιξώδες, ρέει μεταξύ δυο παράλληλων πλακών, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η κάτω πλάκα είναι ακίνητη και η επάνω κινείται με σταθερή ταχύτητα V_ρ κατά την θετική x διεύθυνση.



Η ροή είναι σταθερή και στρωτή και καμία από τις φυσικές ποσότητες δεν είναι συνάρτηση του z. Υπάρχει μια βαθμίδα πιέσεως $-\frac{\partial P}{\partial x}$ κατά την διεύθυνση x και δεν υπάρχει συνιστώσα ταχύτητας κατά την y ή z διεύθυνση σε κανένα σημείο του πεδίου ροής.

1. Να βρεθεί μια λύση για την u συνιστώσα, θεωρώντας αμελητέες τις σωματιδιακές δυνάμεις (ή καθολικές δυνάμεις ή δυνάμεις όγκου)
2. Να μελετηθεί η επίδραση επί της ροής διαφόρων τύπων βαθμίδας πιέσεως.

Λύση

1. Αφού η ταχύτητα δεν έχει συνιστώσα στον y και στον z θα έχουμε ότι :

$$v = w = 0$$

Από την εξίσωση συνέχειας ότι :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Άρα συμπεραίνουμε ότι u(y, z, t). Όμως γνωρίζουμε ότι έχουμε σταθερή ροή και πως καμία από τις φυσικές ποσότητες δεν είναι συνάρτηση του z. Άρα

$$u = u(y)$$

Άρα από τις εξισώσεις Navier-Stokes έχουμε ότι :

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \frac{\theta^2 u}{\theta y^2}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial y}$$

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z}$$

Η πίεση θα έχει εξάρτηση μόνο από τη x : $P = P(x)$

Άρα τελικά

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx}$$

Από όπου ολοκληρώνοντας δυο φορές παίρνουμε διαδοχικά

$$\frac{du}{dy} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx} y + k_1 \quad \kappa\alpha\iota \quad u(y) = \frac{1}{2\mu} \frac{dP}{dx} y^2 + k_1 y + k_2$$

όπου k_1, k_2 σταθερές ολοκλήρωσης που θα υπολογιστούν από τις οριακές συνθήκες του προβλήματος.

$$y = a : u = V_\rho \quad \kappa\alpha\iota \quad y = -a : u = 0$$

Πράγματι έχουμε

$$u(\alpha) = V_\rho = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}a^2 + k_1 a + k_2$$

Και

$$u(-\alpha) = 0 = \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}a^2 - k_1 a + k_2$$

Από όπου εύκολα παίρνουμε

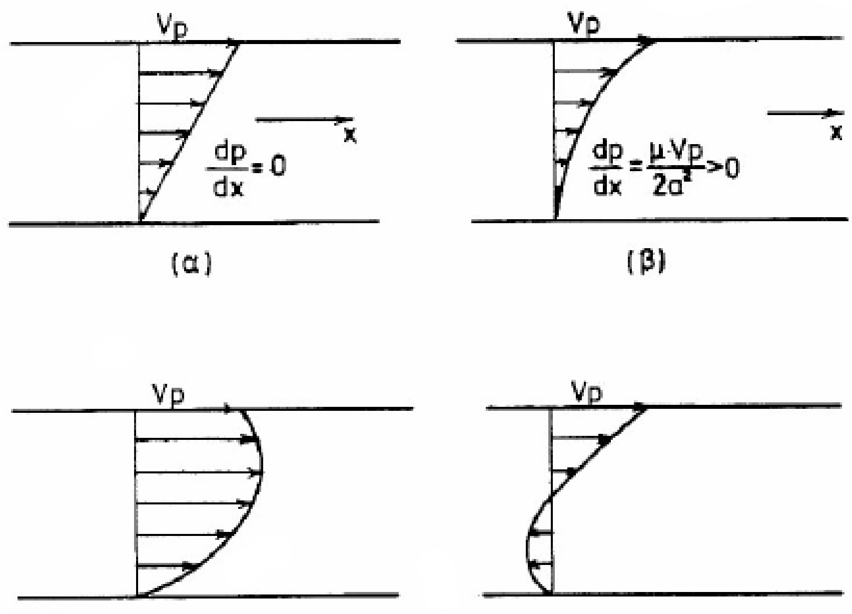
$$k_1 = \frac{V_\rho}{2a} \quad \kappa\alpha\iota \quad k_2 = \frac{V_\rho}{2} - \frac{1}{2\mu}\frac{dP}{dx}a^2$$

Οπότε η έκφραση για την ταχύτητα θα είναι :

$$u(y) = \frac{V_\rho}{2}\left(1 + \frac{y}{a}\right) - \frac{a^2}{2\mu}\frac{dP}{dx}(1 - \frac{y^2}{a^2})$$

2. Όσον αφορά τώρα την επίδραση των διαφόρων τύπων βαθμίδος πιέσεως επί της ροής έχουμε να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα.

    I. Εάν η ροή δημιουργείται από την κίνηση της επάνω πλάκας και δεν υπάρχει βαθμίδα πιέσεως($\frac{dP}{dx} = 0$), τότε η κατανομή της ταχύτητας θα ήταν γραμμική και η κίνηση του ρευστού μεταξύ των πλακών θα οφειλόταν αποκλειστικά στο ιξώδες.
    II. Εάν οι δύο πλάκες ήταν ακίνητες ($V_\rho = 0$) και η ροή ήταν αποτέλεσμα μόνο της βαθμίδας πιέσεως τότε η κατανομή της ταχύτητας θα ήταν παραβολική. Εάν δε ($\frac{dP}{dx} < 0$ τότε η κίνηση θα ήταν κατά την θετική x διεύθυνση ενώ αν $\frac{dP}{dx} > 0$ θα ήταν κατά την αρνητική.
    III. Εάν η κίνηση ήταν αποτέλεσμα τόσο της βαθμίδος πίεσης όσο και της κίνησης της επάνω πλάκας τότε έχουμε διάφορες κατανομές ταχύτητος όπως φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα.
    IV. Τέλος είναι δυνατόν για ειδικές τιμές της βαθμίδος πιέσεως να έχουμε ροή τόσο κατά την θετική όσο και την αρνητική x διεύθυνση.



(α) (β) (γ) (δ)