

Πρόχειρες σημειώσεις -παρουσίαση: Οι σημειώσεις αυτές συνοδεύουν την διάλεξη του μαθήματος.

Συστήματα με ένα βαθμό ελευθερίας

Στο παρόν κεφάλαιο μελετάμε την κίνηση ενός συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας. Δηλαδή, η θέση του συστήματος για κάθε χρονική στιγμή καθορίζεται από μία παράμετρο μόνο. Εάν συμβολίσουμε την παράμετρο αυτή ως q , τότε η εξίσωση η οποία περιγράφει την κίνησή του έχει την μορφή:

$$\ddot{q} = F(q, \dot{q}, t) \quad (1)$$

Ένα παράδειγμα συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας είναι η κίνηση υλικού σημείου μάζας m σε ευθεία υπό την επίδραση δύναμης που εξαρτάται μόνο από τη θέση. Έτσι εάν υποθέσουμε ότι η κίνηση του υλικού σημείου λαμβάνει χώρα επί του άξονος Ox η εξίσωση κινήσεως γράφεται ως

$$m\ddot{x} = F(x) \quad (2)$$

Η προηγούμενη περίπτωση της ευθύγραμμης κίνησης υλικού σημείου, θα αποτελέσει στη συνέχεια για εμάς το βασικό σύστημα μελέτης για λόγους απλότητας. Όμως τα συμπεράσματα που θα προκύψουν, θα ισχύουν προφανώς και στη γενικότερη περίπτωση της κινήσεως συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας.

Θα μελετήσουμε και περιπτώσεις ευθύγραμμης κίνησης υλικού σημείου όπου επιπλέον της δύναμης $F(x)$ επιδρά και δύναμη ανάλογη της ταχύτητας του ή δύναμη που εξαρτάται από το χρόνο.

Την κίνηση που περιγράφεται από την εξίσωση (2) μπορούμε να την μελετήσουμε κατά δύο τρόπους:

1. Να βρούμε τη γενική λύση της (2) για τυχούσες αρχικές συνθήκες, ώστε να γνωρίζουμε τη συγκεκριμένη κίνηση για κάθε αρχική θέση x_0 και αρχική ταχύτητα $\dot{x}_0 = v_0$. Σε πολλές περιπτώσεις όμως αυτό δεν μπορεί να γίνει εύκολα, ή δεν μας ενδιαφέρει η κάθε λύση ξεχωριστά.
2. Ένας άλλος τρόπος μελέτης είναι η **ποιοτική μελέτη** της κινήσεως. Με τον τρόπο αυτό βρίσκουμε τα γενικά χαρακτηριστικά της κινήσεως, π.χ. αν η κίνηση είναι περατωμένη ή όχι, χωρίς να μας ενδιαφέρει μια συγκεκριμένη τροχιά.

Γενική λύση της εξίσωσης $m\ddot{x} = F(x)$

Όταν το δυναμικό σύστημα περιγράφεται από εξίσωση της προηγούμενης μορφής καλείται **αυτόνομο**. (Η δύναμη δεν εξαρτάται ρητώς από το χρόνο).

Αξιοποιώντας το ολοκλήρωμα της ενέργειας μπορούμε να βρούμε την λύση του προβλήματος.

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E \quad (3)$$

Μια ειδική περίπτωση λύσεως είναι η **λύση ισορροπίας**, η οποία έχει τη μορφή :

$$x = x_0 = \text{σταθερό}, \quad (4)$$

Δηλαδή η x δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, οπότε και $\dot{x}=0$. Ονομάζεται λύση ισορροπίας διότι αν το υλικό σημείο τοποθετηθεί στη θέση x_0 με αρχική ταχύτητα ίση προς μηδέν (οποιαδήποτε χρονική στιγμή t_0) θα ισορροπήσει εκεί.

Εφόσον η (4) είναι λύση της διαφορικής εξίσωσης (2) θα πρέπει να την επαληθεύει εκ ταυτότητας, δηλαδή πρέπει να ισχύει:

$$F(x_0) = 0, \quad (5)$$

Συμπέρασμα: η λύση ισορροπίας (ή τα σημεία ισορροπίας) μπορούν να βρεθούν ως λύση της εξίσωσης $F(x) = 0$.

Αν λάβουμε υπόψη ότι ισχύει η σχέση $F(x) = -\frac{dV}{dx}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι στα σημεία ισορροπίας η παράγωγος του δυναμικού (δυναμική συνάρτηση) μηδενίζεται και συνεπώς το δυναμικό στα σημεία ισορροπίας έχει ακρότατη τιμή (μέγιστο ή ελάχιστο) ή παρουσιάζει σημείο καμπής.

Όρια κινήσεως

Μπορούμε να βρούμε τα όρια της κινήσεως χωρίς να επιλύσουμε την διαφορική εξίσωση κίνησης.

Από το ολοκλήρωμα της ενέργειας (3) λαμβάνουμε ότι

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 = E - V(x). \quad (6)$$

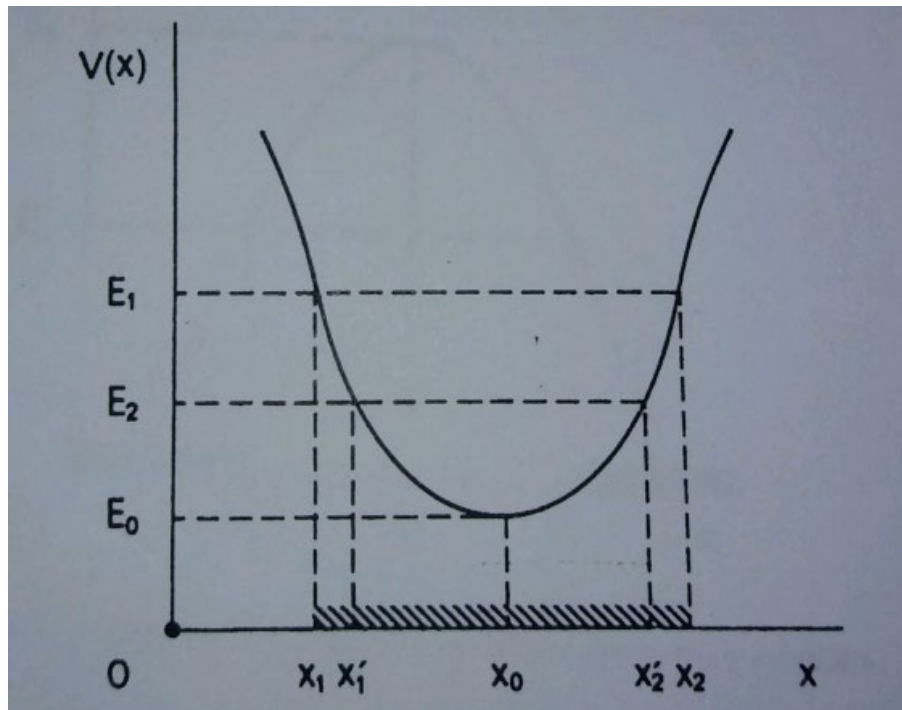
Επειδή το αριστερό μέλος είναι πάντα θετικό ή μηδέν, πρέπει και το δεξιό μέλος να είναι θετικό ή μηδέν, δηλαδή πρέπει να ισχύει η ανίσωση

$$E - V(x) \geq 0. \quad (6)$$

Οι τιμές του x που επαληθεύουν την (6) αποτελούν την **επιτρεπτή περιοχή κινήσεως**.

Διαφορετικά μπορούμε να δουλέψουμε και με τον **γραφικό τρόπο**.

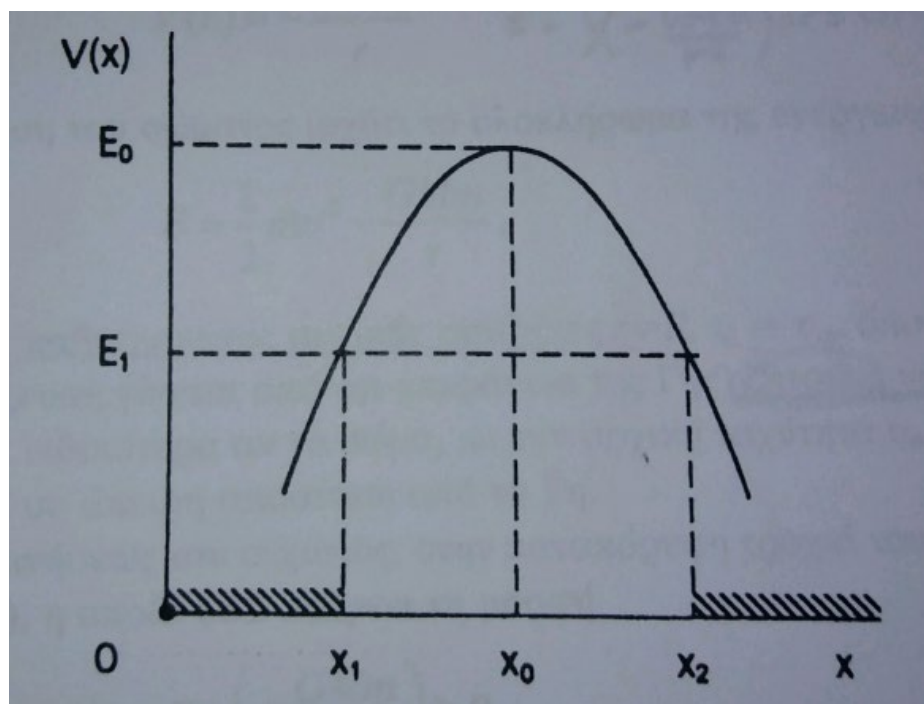
1^η περίπτωση:



Γραφική παράσταση δυναμικού $V(x)$ που παρουσιάζει ελάχιστο.

Η ευθεία $V = E_1$ τέμνει την καμπύλη $V(x)$ στα σημεία που αντιστοιχούν στις τιμές $x = x_1$ και $x = x_2$. Οι τιμές αυτές είναι οι ρίζες της εξισώσεως $E_1 - V(x) = 0$. Οι ρίζες της εξισώσεως είναι τα **όρια της κινήσεως** του υλικού σημείου όταν η μηχανική ενέργεια έχει την τιμή E_1 .

2^η περίπτωση:



Γραφική παράσταση δυναμικού $V(x)$ που παρουσιάζει μέγιστο.

Παράδειγμα:

Βρείτε τα όρια κινήσεως ενός σώματος το οποίο εκτοξεύεται κατά την κατακόρυφη διεύθυνση με αρχική ταχύτητα v_0 από την επιφάνεια της Γης.

Η τροχιά του είναι ευθύγραμμη κατά τη διεύθυνση της κατακορύφου και γίνεται υπό την επίδραση του πεδίου βαρύτητας της Γης

$$F = -\frac{GMm}{r^2}$$

Η δύναμη προέρχεται από δυναμικό

$$V = -\frac{GMm}{r}$$

ενώ κατά την κίνηση του σώματος ισχύει το ολοκλήρωμα της ενέργειας

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{GMm}{r}$$

Οι αρχικές συνθήκες είναι ότι για $r = R$ (όπου R είναι η ακτίνα της Γης) η αρχική ταχύτητα είναι $v = v_0$.

Τα όρια της κίνησης θα είναι οι περιοχές εκείνες για τις οποίες θα ισχύει ότι

$$E - V(x) \geq 0 \text{ ή}$$

$$E - \left(-\frac{GMm}{r}\right) \geq 0.$$

Σημειωτέων δε ότι η τιμή της μηχανικής ενέργειας E μπορεί να είναι γνωστή από τις αρχικές συνθήκες, ενώ θυμίζουμε πως η τιμή της θα διατηρείται κατά τη διάρκεια της κινήσεως του σώματος. Έτσι θα είναι

$$E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{GMm}{R}$$

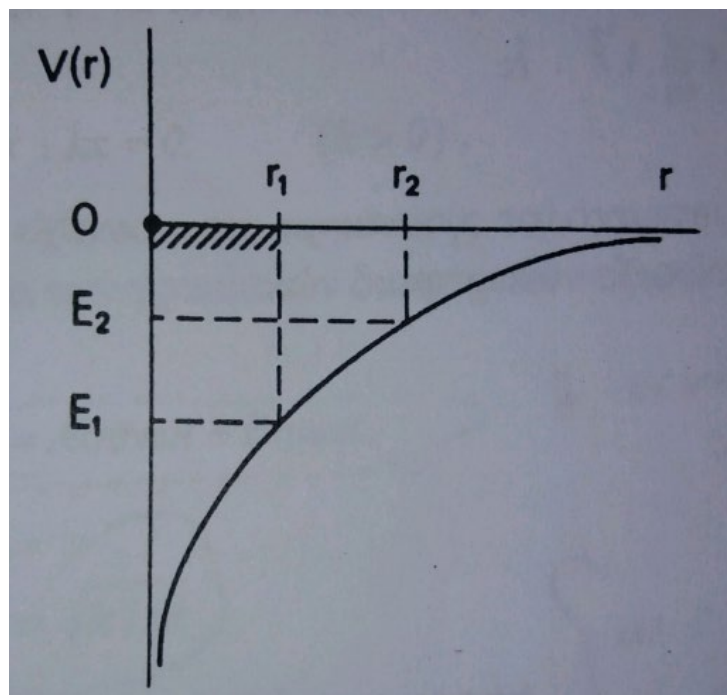
.

Τα όρια της κινήσεως θα προσδιορίζονται ως λύσεις της εξίσωσης

$$E + \frac{GMm}{r} = 0$$

Εξετάζουμε τις περιπτώσεις:

- (i) $E = E_1 < 0$
- (ii) $E = E_2$, όπου $E_1 < E_2 < 0$
- (iii) $E = 0$
- (iv) $E > 0$



Η γραφική παράσταση του δυναμικού των δυνάμεων βαρύτητας και τα όρια της κινήσεως.

Ταχύτητα διαφυγής

Είναι φανερό ότι καθώς αυξάνουμε την αρχική ταχύτητα εκτοξεύσεως του σώματος (από το σταθερό σημείο $r_0 = R$) η τροχιά του γίνεται για πρώτη φορά μη περατωμένη όταν η ταχύτητα v_0 αντιστοιχεί σε μηχανική ενέργεια $E = 0$. Επομένως, αυτή είναι η μικρότερη ταχύτητα που πρέπει να δοθεί στο σώμα για να απομακρυνθεί σε άπειρη απόσταση από τη Γη και ονομάζεται **ταχύτητα διαφυγής**.

Η ταχύτητα αυτή βρίσκεται από το ολοκλήρωμα της ενέργεια θέτοντας $E = 0$ και είναι

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

Παρατηρούμε ότι η ταχύτητα διαφυγής είναι ανεξάρτητη της μάζας του σώματος και η τιμή της είναι 11.2 km/s.

1) Υλικό σημείο μάζας $m = 2 \text{ kg}$ κινείται στον άξονα x υπό την επίδραση μόνο της δύναμης $F(x) = a x + b$, όπου $a = 8 \text{ Nt/m}$, $b = -4 \text{ Nt}$ και το x μετράται σε m . Αν για $t = 0$, $x = 2 \text{ m}$, $u = u_0 < 0$ και $E = 1/2 \text{ Joule}$,

A) Να βρεθεί και να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου θεωρώντας ότι το μηδέν της είναι στο σημείο $x = 0$.

B) Να περιγράψετε την κίνηση του υλικού σημείου για $t > 0$.

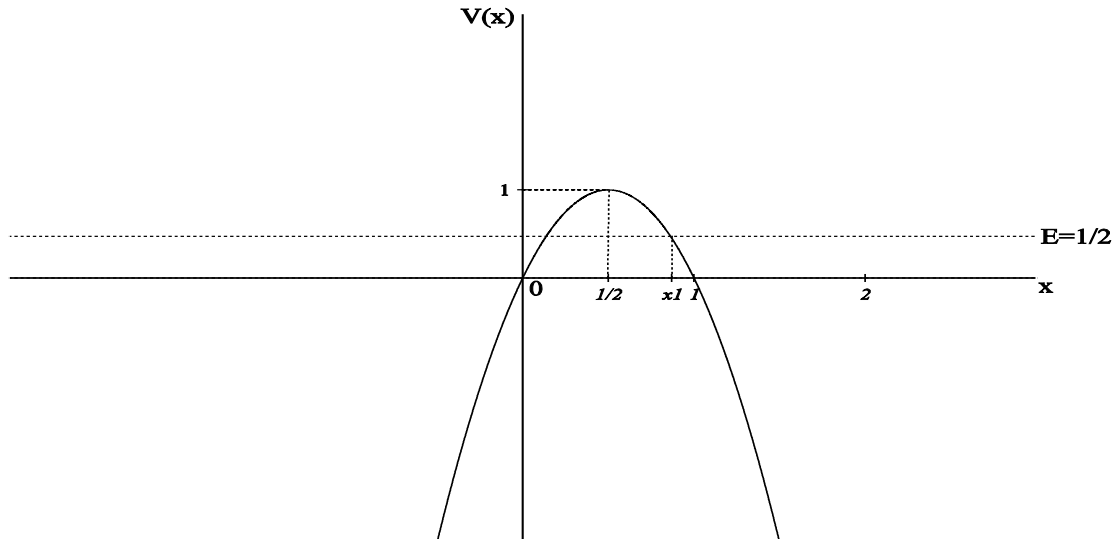
Γ) Να βρείτε την ταχύτητα του υλικού σημείου ως συνάρτηση της θέσης x .

Λύση

$$A) V(x) = -\int F(x) dx = -\int (a x + b) dx = -a \frac{x^2}{2} - b x$$

Αντικαθιστώντας τα a, b έχουμε $V(x) = -4x^2 + 4x$

Η $V(x)$ μηδενίζεται στα σημεία $x=0$ και $x=1$ και έχει μέγιστο $V_{\max}=1$ για $x=1/2$.



B) Το υλικό σημείο ξεκινάει από τη θέση $x=2$ και επειδή η ταχύτητά του εκεί είναι $u_0 < 0$ κινείται προς τα αρνητικά x μέχρι τη θέση $x=x_1$ όπου $V(x_1)=E=1/2$. Με λύση της εξίσωσης $-4x^2+4x=1/2$ βρίσκουμε

$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\sqrt{2}$. Στο σημείο $x=x_1$ σταματά στιγμιαία διότι η κινητική του ενέργεια μηδενίζεται. Όμως,

λόγω του ότι $F(x_1) = - \left. \frac{dV(x)}{dx} \right|_{x=x_1} > 0$, αναγκάζεται να κινηθεί προς τα θετικά x και συνεχίζει να κινείται μέχρι το $+\infty$.

Γ) Από τον νόμο διατήρησης της ενέργειας έχουμε $u(x) = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - V(x)]}$ και με αντικαταστάσεις των $m, E, V(x)$ έχουμε $u(x) = \pm \sqrt{\frac{1}{2} + 4x^2 - 4x}$.

2) Η δυναμική ενέργεια ενός υλικού σημείου μάζας m είναι $V(x) = a x^3 - b x^2$, όπου $a = 1 \text{ J} \cdot \text{m} / \hbar^2$, $b = 1 \text{ J} \cdot \text{m} / \hbar^2$ και το x μετράται σε m .

A) Να βρεθεί και να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δύναμη $F(x)$ που ασκείται στο υλικό σημείο.

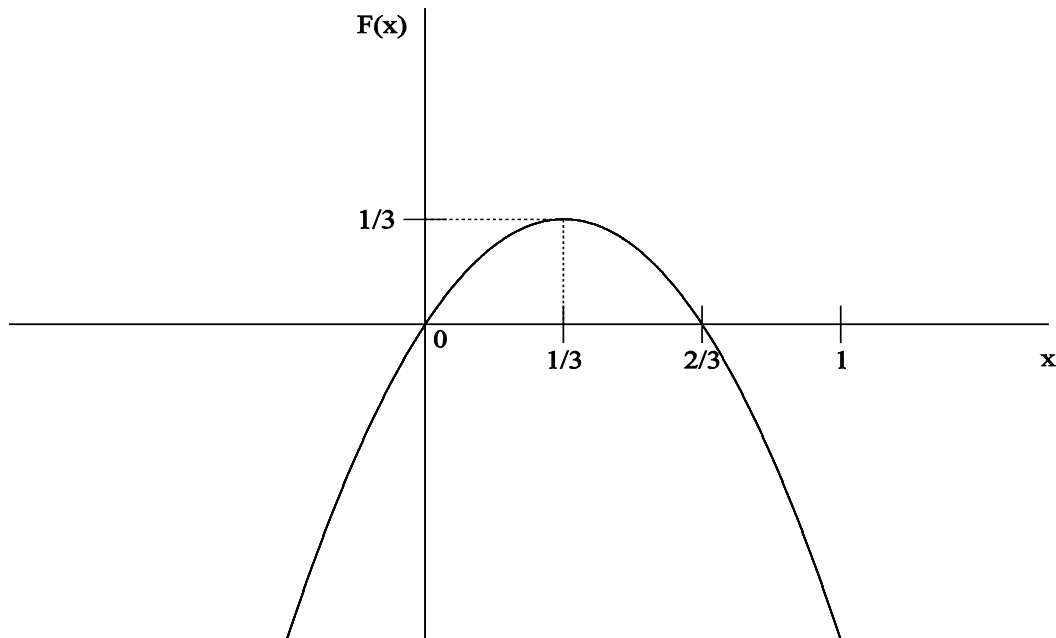
B) Να σχεδιασθεί **με ακρίβεια** η δυναμική ενέργεια $V(x)$ του υλικού σημείου.

Γ) Να μελετηθεί η κίνηση του υλικού σημείου για όλες τις τιμές της ολικής ενέργειας E , δηλαδή για οποιεσδήποτε **επιτρεπτές** αρχικές συνθήκες. Υπενθυμίζεται ότι δεν μπορεί το υλικό σημείο να βρεθεί σε μια θέση x για την οποία $V(x) > E$.

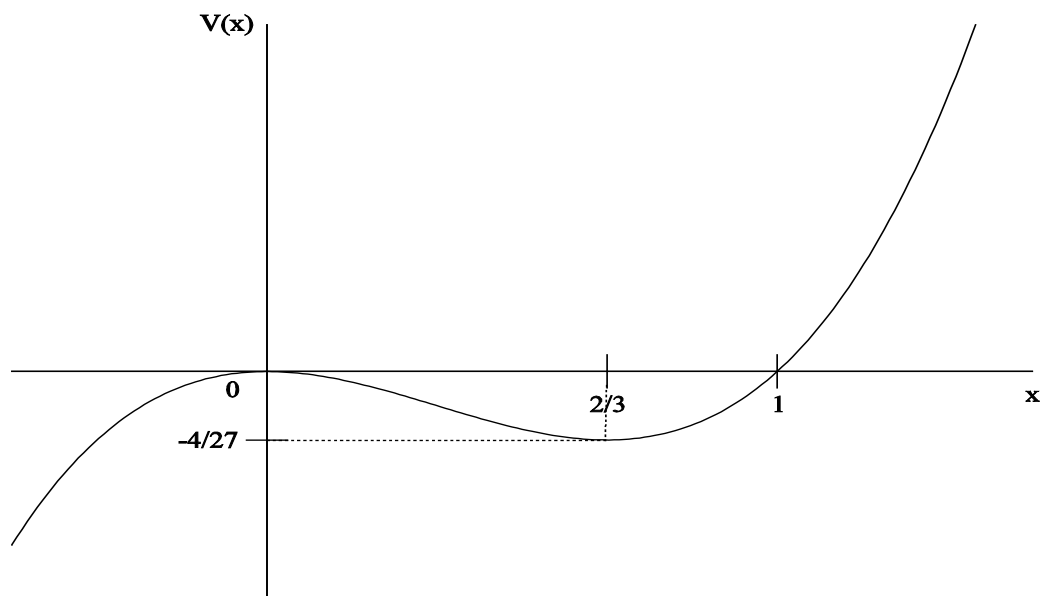
Λύση

A) Έχουμε ότι $V(x) = x^3 - x^2$. Συνεπώς $F(x) = -\frac{d}{dx} V(x) = -3x^2 + 2x$

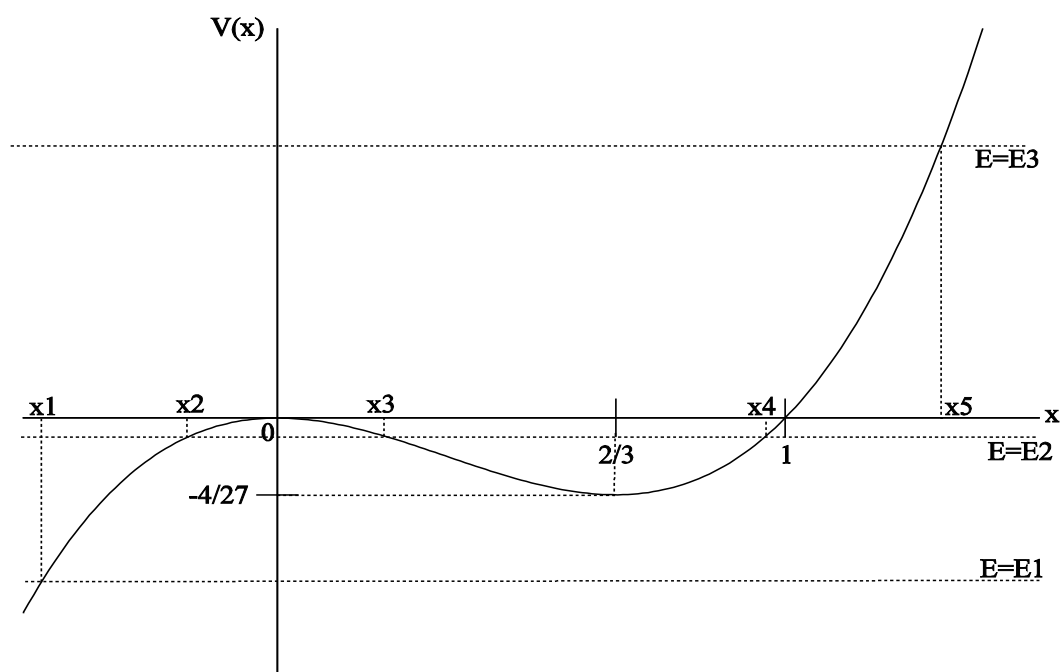
Η δύναμη μηδενίζεται στα σημεία $x=0$ και $x=2/3$, και έχει μέγιστο $F_{\max}=1/3$ στο $x=1/3$.



B) Η δυναμική ενέργεια $V(x)$ μηδενίζεται στα σημεία $x=0$ και $x=1$, έχει μέγιστο $V_{\max}=0$ στο $x=0$ και ελάχιστο $V_{\min}=-4/27$ στο $x=2/3$.



Γ) Από τη γραφική παράσταση της $V(x)$ παρατηρούμε ότι η διερεύνηση πρέπει να γίνει για τρεις περιοχές τιμών της ολικής ενέργειας E : 1) $E < -4/27$, 2) $-4/27 \leq E \leq 0$, 3) $E > 0$.



1. Για $E=E_1<-4/27$ η κίνηση του υλικού σημείου επιτρέπεται μόνο στις θέσεις x για τις οποίες $V(x) \leq E_1$. Άρα κίνηση επιτρέπεται μόνο για $x \leq x_1$, όπου το x_1 είναι λύση της εξίσωσης $V(x) = E_1$, δηλαδή $x^3 - x^2 = E_1$. Έτσι, αν το υλικό σημείο ξεκινήσει από τη θέση $x_0 < x_1$ και έχει αρνητική αρχική ταχύτητα θα πάει με συνεχώς αυξανόμενη κατά μέτρο ταχύτητα στο $-\infty$, ενώ αν έχει θετική αρχική ταχύτητα θα πάει με μειούμενη ταχύτητα μέχρι το σημείο x_1 , εκεί θα σταματήσει στιγμιαία και μετά με συνεχώς αυξανόμενη κατά μέτρο ταχύτητα θα πάει στο $-\infty$.

2. Για $-\frac{4}{27} < E = E_2 < 0$ κίνηση του υλικού σημείου επιτρέπεται είτε για $x \leq x_2$ είτε για $x_3 \leq x \leq x_4$. Τα σημεία x_2, x_3, x_4 είναι λύση της εξίσωσης $x^3 - x^2 = E_2$. Αν η αρχική θέση $x=x_0$ του υλικού σημείου ήταν $x_0 \leq x_2$, τότε η κίνησή του περιορίζεται στην περιοχή $x \leq x_2$. Αν όμως $x_3 \leq x_0 \leq x_4$, τότε η κίνηση περιορίζεται μεταξύ των σημείων $x = x_3$ και $x = x_4$ και το υλικό σημείο κάνει ταλάντωση μεταξύ των δύο αυτών σημείων.

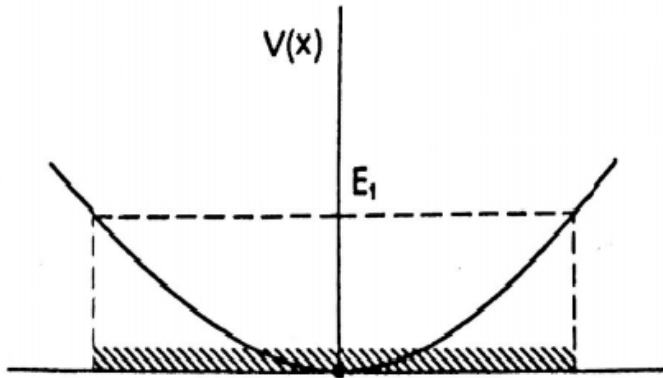
Για $E=-4/27$ το υλικό σημείο είτε ηρεμεί στη θέση $x=2/3$ είτε κινείται αριστερά του σημείου που είναι λύση της εξίσωσης $x^3 - x^2 = -\frac{4}{27}$.

Για $E=0$ το υλικό σημείο μπορεί να κινείται στην περιοχή $x \leq 1$. Στο σημείο $x=0$ όμως σταματά διότι η κινητική του ενέργεια είναι μηδέν και η δύναμη που ασκείται εκεί είναι μηδέν.

3. Για $E = E_3 > 0$ το υλικό σημείο μπορεί να κινείται στην περιοχή $x \leq x_5$, όπου x_5 είναι η λύση της εξίσωσης $x^3 - x^2 = E_3$. Η περαιτέρω διερεύνηση είναι όπως στην περίπτωση $E=E_1<-4/27$.

Απλή αρμονική ταλάντωση (Γραμμική ταλάντωση)

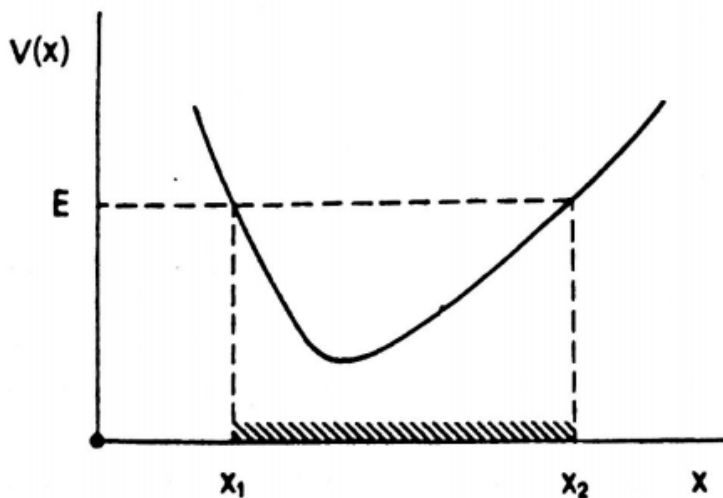
$$F(x) = -kx \text{ με } (k > 0).$$



Η γραφική παράσταση του δυναμικού $V(x) = \frac{1}{2}kx^2$ της απλής αρμονικής ταλάντωσης και τα όρια της κινήσεως.

Μη γραμμικές ταλαντώσεις

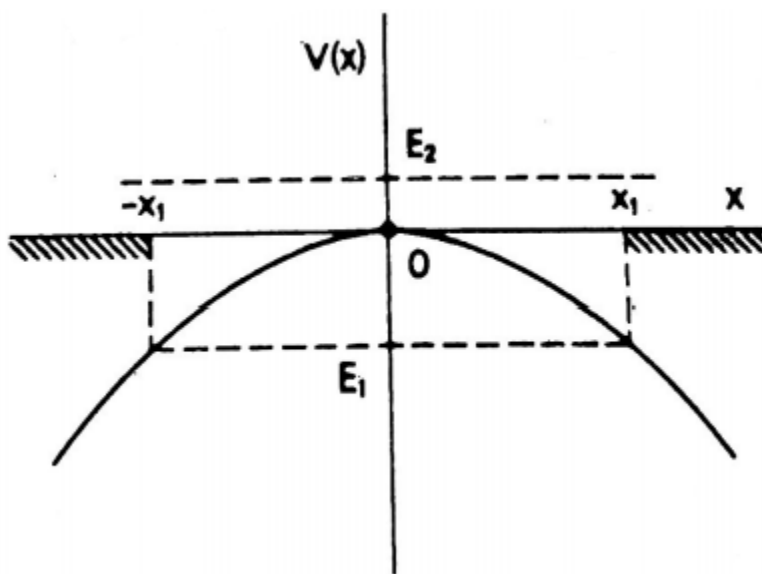
$$F(x) = -kx + \alpha x^2, \quad \text{με} \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{\alpha}{3}x^3$$



Η γραφική παράσταση δυναμικού $V(x)$ ενός μη γραμμικού συστήματος όπου εμφανίζονται μή γραμμικές ταλαντώσεις.

Απωστική δύναμη ανάλογη της αποστάσεως

$$F(x) = kx \text{ με } (k > 0).$$



Η γραφική παράσταση του δυναμικού $V(x) = -\frac{1}{2}kx^2$ των απωστικών δυνάμεων και τα όρια της κινήσεως.

Ευστάθεια των σημείων ισορροπίας

Θυμίζουμε ότι τα σημεία ισορροπίας x_0 της εξίσωσης $m\ddot{x} = F(x)$ προκύπτουν ως λύση της εξίσωσης $F(x) = 0$. Επειδή ισχύει ότι $F(x) = -\frac{dV}{dx}$, τα σημεία ισορροπίας μπορούν να βρεθούν ως λύσεις της εξίσωσης $\frac{dV}{dx} = 0$, διότι στα σημεία αυτά το δυναμικό παρουσιάζει ακρότατη τιμή (ή σημείο καμπής).

Έστω ότι το $x = x_0$ είναι σημείο ισορροπίας, όπου επίσης ισχύει ότι $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$.

Το σημείο ισορροπίας $x = x_0$ καλείται **σημείο ευσταθούς ισορροπίας** αν η κίνηση που αντιστοιχεί σε γειτονικές αρχικές συνθήκες $x = x_0 + \varepsilon_1$, $\dot{x} = \varepsilon_2$, όπου τα ε_1 και ε_2 λαμβάνουν μικρές τιμές, είναι περατωμένη γύρω από το αρχικό σημείο $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$.

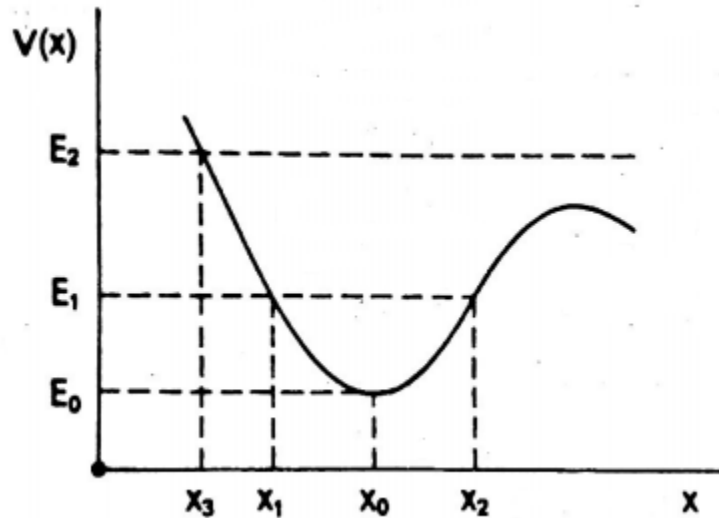
Το σημείο ισορροπίας $x = x_0$ καλείται **σημείο ασταθούς ισορροπίας** αν η κίνηση που αντιστοιχεί σε γειτονικές αρχικές συνθήκες $x = x_0 + \varepsilon_1$, $\dot{x} = \varepsilon_2$, όπου τα ε_1 και ε_2 λαμβάνουν μικρές τιμές, δεν είναι περατωμένη γύρω από το αρχικό σημείο $x = x_0$, $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$.

Η μελέτη της ευστάθειας ενός σημείου ισορροπίας μπορεί να γίνει με δύο τρόπους.

1. Με ποιοτική μελέτη στην περιοχή του σημείου ισορροπίας.
2. Με τη μέθοδο των διαταραχών.

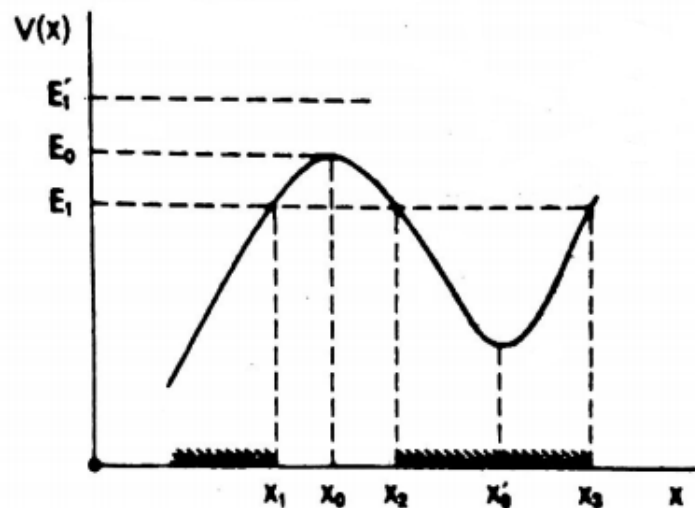
Ποιοτική μελέτη της ευστάθειας σημείου ισορροπίας - Παραδείγματα

Περίπτωση 1^η:



Τα όρια της κινήσεως ενός μη γραμμικού συστήματος, για διάφορες μετατοπίσεις από το ευσταθές σημείο ισορροπίας x_0 .

Περίπτωση 2^η:



Τα όρια της κινήσεως ενός μη γραμμικού συστήματος για μετατόπιση από το ασταθές σημείο ισορροπίας x_0 . Είναι δυνατή η παγίδευση γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας x'_0 .

Μελέτη της ευστάθειας σημείου ισορροπίας με τη μέθοδο των διαταραχών- Παράδειγμα

Με τη μέθοδο αυτή βρίσκουμε τη γενική λύση, κατά προσέγγιση, σε μια μικρή περιοχή του σημείου ισορροπίας.

Έστω ότι το $x = x_0$ είναι σημείο ισορροπίας, όπου επίσης ισχύει ότι $\dot{x} = \dot{x}_0 = 0$. Οι συνθήκες αυτές είναι οι αρχικές συνθήκες. Θεωρούμε τις γειτονικές αρχικές συνθήκες $x = x_0 + \varepsilon_1$, $\dot{x} = \varepsilon_2$, όπου τα ε_1 και ε_2 λαμβάνουν μικρές τιμές. Έτσι η διαταραγμένη λύση, που αντιστοιχεί στις νέες αρχικές συνθήκες γράφεται υπό τη μορφή

$$x = x_0 + x_1(t) \quad (1)$$

Όπου η συνάρτηση $x_1(t)$ αναπαριστά την εκτροπή του υλικού σημείου από τη θέση ισορροπίας. Επομένως η λύση (1) θα πρέπει να επαληθεύει την εξίσωση κίνησης $m\ddot{x} = F(x)$, δηλαδή ισχύει ότι

$$\begin{aligned} m\ddot{x} = F(x) &\Rightarrow m(\ddot{x}_0 + \ddot{x}_1) = F(x_0 + x_1) \Rightarrow \\ m\ddot{x}_1 &= F(x_0 + x_1) \end{aligned} \quad (2)$$

Στη συνέχεια αναπτύσσουμε το δεξιό μέλος σε σειρά Taylor κατά τις δυνάμεις του x_1 και έχουμε

$$F(x_0 + x_1) = F(x_0) + \left(\frac{dF}{dx}\right)_{x=x_0} x_1 + \left(\frac{d^2F}{dx^2}\right)_{x=x_0} x_1^2 + \dots \quad (3)$$

Επειδή το σημείο $x = x_0$ είναι σημείο ισορροπίας ισχύει $F(x_0) = 0$.

Επίσης επειδή είναι $F(x) = -\frac{dV}{dx}$, έχουμε ότι $\frac{dF}{dx} = -\frac{d^2V}{dx^2}$.

Επιπλέον παραλείποντας όρους δευτέρας και ανωτέρας τάξεως ως προς x_1 στη σειρά Taylor και αντικαθιστώντας την δύναμη στη σχέση (2) λαμβάνουμε ότι

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0, \quad (4)$$

όπου $k = \left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0}$.

Η (4) είναι ουσιαστικά γραμμική διαφορική εξίσωση, η οποία μπορεί να έχει προκύψει ακόμη και για την περίπτωση όπου η δύναμη είναι μη γραμμική. Για τον λόγο αυτό πολλές φορές την αναφέρουμε ως «γραμμικοποιημένη» διαφορική εξίσωση της διαφορικής εξίσωσης (2), στην περιοχή του σημείου ισορροπίας.

Η (4) είναι γραμμική διαφορική εξίσωση, δεύτερης τάξεως με σταθερούς συντελεστές.

(i) Εάν $k > 0$:

Η λύση είναι $x_1 = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, όπου $\omega = \sqrt{k/m}$ και A, B αυθαίρετες σταθερές. Είναι σαφές ότι η κίνηση είναι περατωμένη και επομένως το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας. Παρατηρούμε ότι για μικρές μετατοπίσεις (μικρές διαταραχές) η κίνηση στην περιοχή ενός σημείου ευσταθούς ισορροπίας είναι απλή αρμονική ταλάντωση.

Διαφορετικά: Επειδή $k > 0$ σημαίνει $\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0} > 0$, δηλαδή το δυναμικό στο σημείο αυτό παρουσιάζει ελάχιστο. επομένως το σημείο ισορροπίας είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας.

(ii) Εάν $k < 0$:

Η λύση είναι $x_1 = c_1 e^{\sqrt{-k/mt}} + c_2 e^{-\sqrt{-k/mt}}$. Είναι σαφές ότι η κίνηση δεν είναι περατωμένη για αυθαίρετες αρχικές συνθήκες (δηλαδή αυθαίρετες σταθερές c_1 και c_2) και επομένως το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. Όμως θα πρέπει να παρατηρήσουμε ότι για κατάλληλες αρχικές συνθήκες είναι $c_1 = 0$ και συνεπώς στη περίπτωση αυτή η λύση είναι περατωμένη και τείνει ασυμπτωματικά στο σημείο ισορροπίας.

Διαφορετικά: Επειδή $k < 0$ σημαίνει $\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)_{x=x_0} < 0$, δηλαδή το δυναμικό στο σημείο αυτό παρουσιάζει μέγιστο. επομένως το σημείο ισορροπίας είναι ασταθές σημείο ισορροπίας.

(iii) Εάν $k = 0$:

Ακολουθείται παρόμοια διερεύνηση με την προηγούμενη περίπτωση.

Η λύση που βρήκαμε ισχύει για μικρές μετατοπίσεις (διαταραχές).

Η μέθοδος που ακολουθήσαμε είναι γενική και ονομάζεται **μέθοδος των διαταραχών**.

Η μελέτη της ευστάθειας με τη μέθοδο των διαταραχών ονομάζεται **γραμμική ευστάθεια** διότι προκύπτει από τη «γραμμικοποιημένη» διαφορική εξίσωση (4).

Διαγράμματα φάσεως

Είναι ένας τρόπος **ποιοτικής μελέτης** της κινήσεως ενός μηχανικού συστήματος. Με την βοήθεια των διαγραμμάτων φάσεως μπορούμε να μελετήσουμε ποιοτικά και συστήματα στα οποία ασκούνται και μη συντηρητικές δυνάμεις. Το διάγραμμα φάσεως δίνει πληροφορίες για τη συμπεριφορά του συστήματος, όπως εάν η τροχιά είναι περατωμένη κ.λπ.

Έστω ότι το υλικό σημείο κινείται επί της ευθείας Ox υπό την επίδραση της δυνάμεως

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}) \quad (1)$$

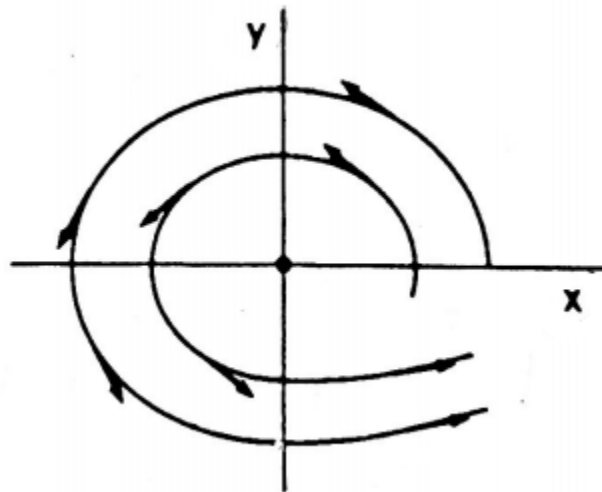
Η διαφορική εξίσωση (1) μπορεί να γραφεί ως σύστημα δύο διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x} = y \text{ και } \dot{y} = F(x, y) \quad (2)$$

και μια λύση είναι

$$x = x(t), y = y(t). \quad (3)$$

Σχεδιασμός διαγράμματος φάσεως:



Διάγραμμα φάσεως συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας, και η αντίστοιχη ροή φάσεως.

Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων με άξονες Ox και Oy . Το επίπεδο το οποίο ορίζουν είναι ένας χώρος δύο διαστάσεων και ονομάζεται **χώρος των φάσεων**.

Ένα σημείο του χώρου των φάσεων μπορεί να είναι το σημείο με συντεταγμένες (x, y) . Το σημείο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως οι αρχικές συνθήκες του συστήματος (2) όπου η λύση του δίνεται από τις σχέσεις (3).

Για κάθε τιμή του t θα έχουμε ένα ζεύγος τιμών $(x(t), y(t))$ που ορίζει ένα σημείο στο χώρο των φάσεων. Το σημείο αυτό καλείται **σημείο φάσεως**.

Το σύνολο όλων αυτών των σημείων, που αντιστοιχούν σε μια ορισμένη κίνηση, ορίζουν μια καμπύλη, η οποία ονομάζεται **καμπύλη φάσεως**. Η καμπύλη φάσεως μιας λύσεως ισορροπίας εκφυλίζεται σε ένα σημείο μόνο.

Στην πραγματικότητα μπορούν να υπάρξουν άπειρες τέτοιες καμπύλες στο χώρο των φάσεων, που η καθεμία να αντιστοιχεί σε διαφορετική κίνηση. Δύο καμπύλες φάσεως δεν μπορούν να τέμνονται, διότι τότε το σημείο τομής θα ήταν οι αρχικές συνθήκες για δύο διαφορετικές κινήσεις, γεγονός το οποίο δεν μπορεί να συμβεί.

Το σύνολο όλων των καμπύλων φάσεως καλείται **διάγραμμα φάσεως**.

Θεωρούμε μια συγκεκριμένη κίνηση $x(t), y(t)$ του συστήματος (2). Το σημείο φάσεως (x, y) κινείται επί της καμπύλης φάσεως με μια ορισμένη φορά. Η **ταχύτητα** με την οποία κινείται είναι το διάνυσμα $(\dot{x}, \dot{y})$ ή διαφορετικά το διάνυσμα $(y, F(x, y))$.

Επειδή σε κάθε σημείο του χώρου των φάσεων αντιστοιχεί το διάνυσμα της ταχύτητας λέμε ότι έχουμε ένα διανυσματικό πεδίο ταχυτήτων που ορίζει στο επίπεδο x, y μια ροή που ονομάζεται **ροή φάσεως**.

Για να βρούμε το διάγραμμα φάσεως του συστήματος [(1), $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$] ή [(2), $\dot{x} = y$ και $\dot{y} = F(x, y)$] πρέπει να βρούμε τη γενική λύση της μορφής [(3), $x = x(t)$, $y = y(t)$]. Οι σχέσεις (3) είναι ουσιαστικά οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης φάσεως (για καθορισμένες αρχικές συνθήκες) με παράμετρο το χρόνο.

Ένας άλλος τρόπος για να βρούμε τις καμπύλες φάσεως είναι ο εξής: Από το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων (2) απαλείφουμε το χρόνο διαιρώντας τις δύο εξισώσεις κατά μέλη

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{F(x, y)}{y}$$

και τελικά λαμβάνουμε ότι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F(x, y)}{y}$$

Δηλαδή καταλήγουμε σε μια διαφορική εξίσωση πρώτης τάξεως, με ανεξάρτητη μεταβλητή x , η λύση της οποίας θα δώσει τις καμπύλες φάσεως υπό τη μορφή $y = y(x)$ ή $f(x, y) = 0$.

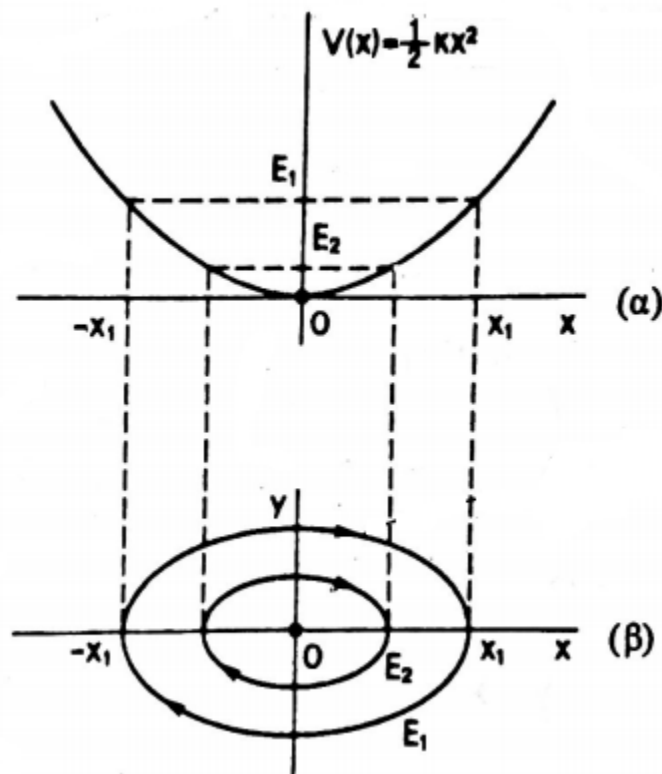
Απλή αρμονική ταλάντωση (Γραμμική ταλάντωση)

$$F(x) = -kx \text{ με } (k > 0).$$

Η εξίσωση των καμπύλων φάσεως προκύπτει να είναι η

$$\frac{x^2}{2E/k} + \frac{y^2}{2E/m} = 1$$

Η οποία παριστάνει έλλειψη με ημιάξονα κατά τον Ox ίσο προς $a = \sqrt{2E/k}$ και ημιάξονα κατά τον άξονα Oy ίσο προς $b = \sqrt{2E/m}$.



Το διάγραμμα φάσεως της απλής αρμονικής ταλάντωσης και ο συσχετισμός του με τα όρια της κινήσεως, όπως δίνονται από το διάγραμμα του δυναμικού

Απωστική δύναμη ανάλογη της αποστάσεως

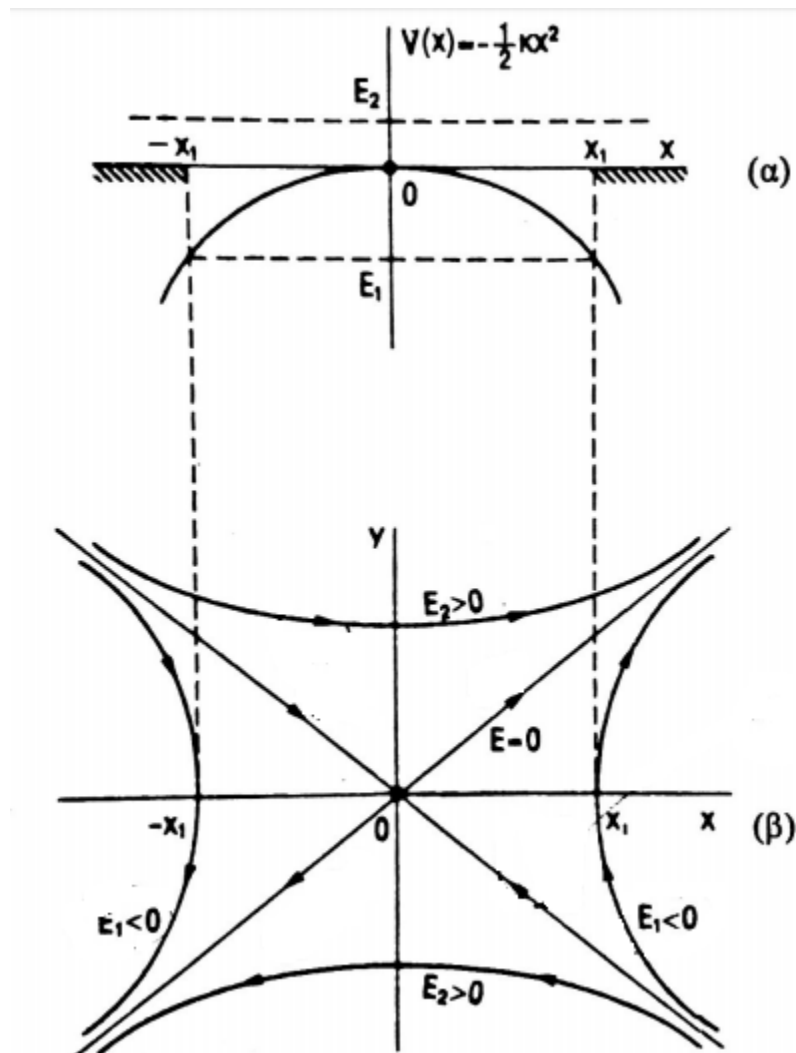
$$F(x) = kx \text{ με } (k > 0).$$

Η εξίσωση των καμπύλων φάσεως προκύπτει να είναι η

$$\frac{y^2}{2E/m} - \frac{x^2}{2E/k} = 1$$

Η σχέση αυτή ισχύει για $E \neq 0$ και παριστάνει κλάδους υπερβολής με ασυμπτώτους τις ευθείες

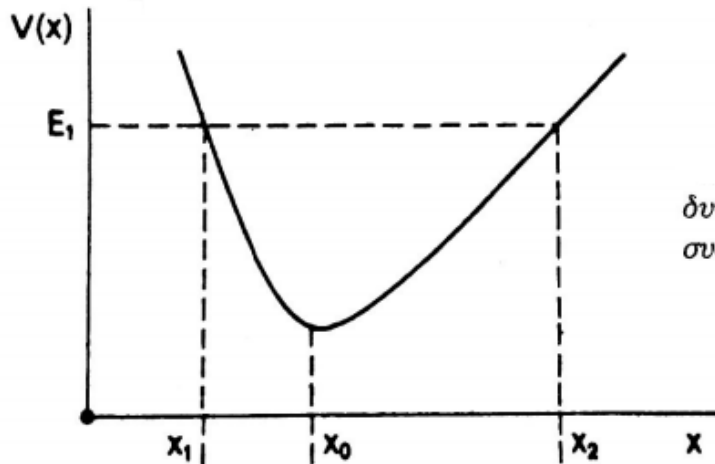
$y = \pm \sqrt{k/m} x$. Για $E = 0$ προκύπτει ότι οι καμπύλες φάσεως είναι οι ευθείες $y = \pm \sqrt{k/m} x$.



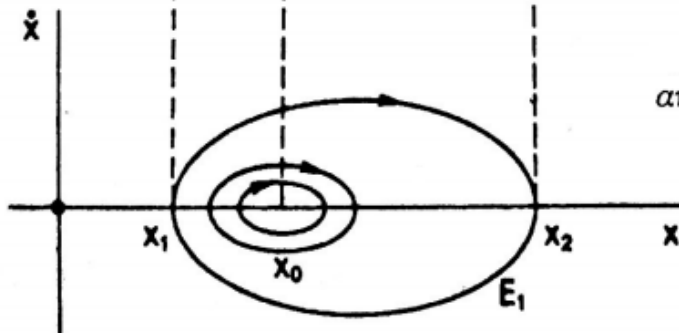
Το διάγραμμα φάσεως για απωστικές δυνάμεις ανάλογες της αποστάσεως και ο συσχετισμός του με τα όρια της κινήσεως όπως προκύπτουν από το διάγραμμα του δυναμικού $V(x) = -\frac{1}{2} kx^2$.

Μη γραμμικές ταλαντώσεις

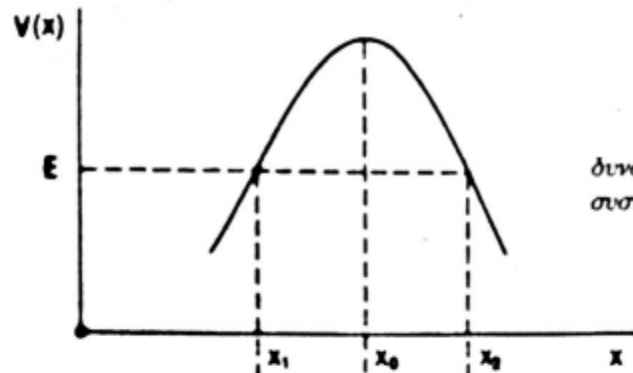
$$F(x) = -kx + \alpha x^2, \quad \text{με} \quad V(x) = \frac{1}{2}kx^2 - \frac{\alpha}{3}x^3$$



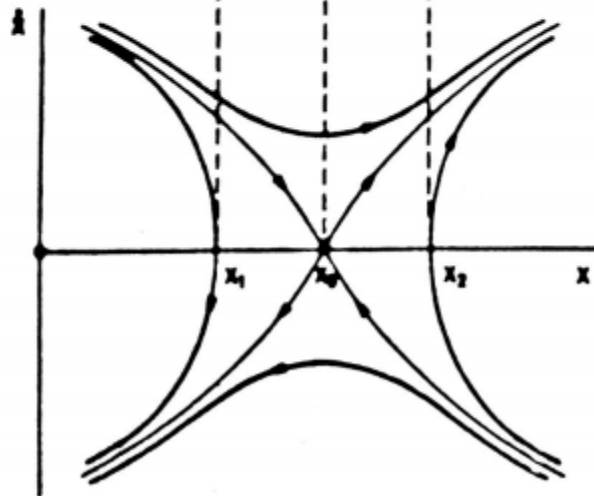
Το διάγραμμα του δυναμικού ενός μη γραμμικού συστήματος που παρουσιάζει ελάχιστο.



Το διάγραμμα φάσεως που αντιστοιχεί στο δυναμικό



Το διάγραμμα του δυναμικού ενός μη γραμμικού συστήματος που παρουσιάζει μέγιστο.



Το διάγραμμα φάσεως που αντιστοιχεί στο δυναμικό

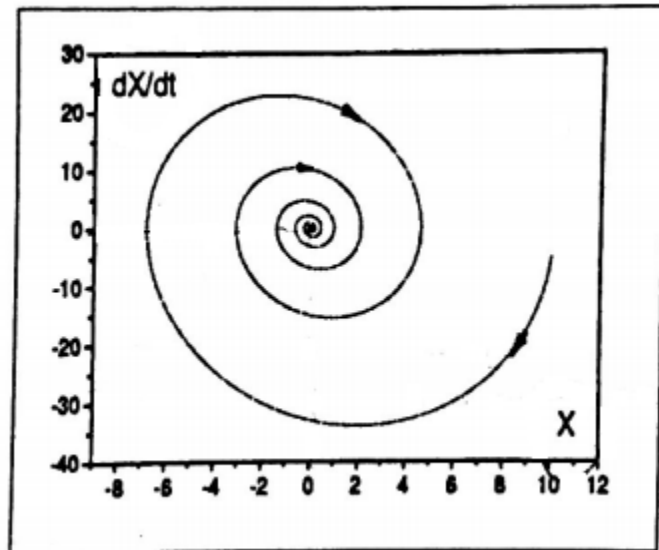
Την θεωρία για την μελέτη συστήματος με ένα βαθμό ελευθερίας θα την αξιοποιήσουμε και όταν θα μελετήσουμε πεδία κεντρικών δυνάμεων.

Μη συντηρητικά πεδία δυνάμεων

Θεωρούμε την κίνηση υλικού σημείου υπό την επίδραση δυνάμεως της μορφής (Φθίνουσα ταλάντωση υλικού σημείου)

$$F(x) = -kx - b\dot{x}, \text{ με } (k, b > 0).$$

Η κίνηση στο χώρο των φάσεων είναι μία σπείρα η οποία τείνει ασυμπτωτικά στο σημείο ισορροπίας από οποιοδήποτε σημείο $(x_0, \dot{x}_0)$ και εάν ξεκινήσουμε. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο O (αρχή των αξόνων) είναι σημείο ασυμπτωτικής ευστάθειας.



Το σημείο ισορροπίας O είναι ασυμπτωτικά ευσταθές. Η τροχιά αντιστοιχεί στις τιμές των παραμέτρων $\gamma = 0.5, \omega_1 = 4$.

Μη αυτόνομα συστήματα

Έστω ότι το υλικό σημείο κινείται επί της ευθείας Ox υπό την επίδραση της δυνάμεως

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t) \quad (1)$$

Στην περίπτωση αυτή θεωρούμε τον *εκτεταμένο χώρο φάσεων* $(x, \dot{x}, t)$, ο οποίος είναι χώρος τριών διαστάσεων.

Απεικόνιση Poincare

Η συνεχής ροή του συστήματος στον τρισδιάστατο χώρο $(x, \dot{x}, t)$ μπορεί να μετασχηματιστεί σε μία ισοδύναμη διακριτή απεικόνιση στο δισδιάστατο χώρο $(x, \dot{x})$. Η απεικόνιση αυτή καλείται *απεικόνιση Poincare* ή στροβοσκοπική απεικόνιση.

Το ανωτέρω υλικό έχει αντληθεί κυρίως από το βιβλίο «ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ-ΝΕΥΤΩΝΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΗ» Τόμος Α' του Ι.Δ. Χατζηδημητρίου, Εκδόσεις Γιαχούδη, Θεσσαλονίκη 2000.