

## Κίνηση σε ευθεία. Κίνηση στο επίπεδο. Αξιώματα της δυναμικής

**1.** Από το αξίωμα της διατηρήσεως της μηχανικής ενέργειας υλικού σημείου, να αποδειχθεί ότι η δυναμική συνάρτηση δεν περιέχει ρητώς τον χρόνο.

(Διαφορετική διατύπωση: Αποδείξτε ότι αν η μηχανική ενέργεια υλικού σημείου διατηρείται, η δυναμική συνάρτηση δεν περιέχει ρητώς τον χρόνο.)

**Λύση.** Δίδεται ότι  $E = T + U = \text{σταθ.}$ .

Παραγωγίζουμε ως προς τον χρόνο, οπότε  $\frac{dE}{dt} = \frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = 0$  (1).

$$T = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}}. \text{ Άρα } \frac{dT}{dt} = m \ddot{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}}.$$

$$\text{Επίσης } U = U(x, y, z, t) \text{ και } dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz + \frac{\partial U}{\partial t} dt.$$

$$\text{Συνεπώς } \frac{dU}{dt} = \nabla U \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt} + \frac{\partial U}{\partial t} \Rightarrow \frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t}.$$

$$\text{Η (1) επομένως γράφεται ως } \frac{dE}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} - \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial U}{\partial t} = 0. \text{ Άρα } \frac{dE}{dt} = \frac{\partial U}{\partial t}. \text{ Αλλά } E = \text{σταθ.}, \text{ οπότε } \frac{dE}{dt} = 0.$$

$$\text{Επομένως } \frac{\partial U}{\partial t} = 0, \text{ δηλαδή } U = U(x, y, z).$$

**2.** Υλικό σημείο μάζας  $m=1$  ξεκινά από την ηρεμία και κινείται επί ευθείας με επιτάχυνση  $ke^{-pt}$ , όπου  $k$  και  $p$  θετικές σταθερές και  $t$  ο χρόνος κινήσεως. Να υπολογιστεί η ταχύτητα και η θέση του κινητού κατά την στιγμή  $t$ . Να αποδειχθεί επίσης ότι  $px = kt - u$ , όπου  $u$  είναι η ταχύτητα του κινητού κατά την στιγμή  $t$ .

**Απάντηση:** (α)  $u = \frac{k}{p}(1 - e^{-pt})$ , (β)  $x = \frac{k}{p}t - \frac{k}{p^2}(1 - e^{-pt})$ .

**Υπόδειξη:** Γράψτε τη διαφορική εξίσωση της κινήσεως της οποίας το δεξιό μέλος είναι η έκφραση  $ke^{-pt}$ . Ακολουθώσ επιλέξτε την κατάλληλη έκφραση της επιταχύνσεως, με την οποία θα καταστεί δυνατή η

ολοκλήρωση. Η επιτάχυνση  $\ddot{x}$  γράφεται υπό τις ακόλουθες μορφές:  $\ddot{x} = \frac{du}{dt}$ ,  $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$ ,  $\ddot{x} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = u \frac{du}{dx}$ .

**Λύση.** Η εξίσωση της κινήσεως είναι  $\ddot{x} = ke^{-pt}$  (1).

Γράφουμε  $\ddot{x} = \frac{du}{dt}$ , οπότε η διαφορική εξίσωση της κινήσεως (1) ολοκληρώνεται

$$\int du = \int ke^{-pt} dt + C \Rightarrow u = -\frac{k}{p}e^{-pt} + C. \text{ Από την αρχική συνθήκη } u = 0 \text{ για } t = 0 \text{ προκύπτει } C = \frac{k}{p}.$$

Επομένως  $u = \frac{k}{p}(1 - e^{-pt})$  (2).

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την θέση του κινητού κατά την στιγμή  $t$  θέτουμε στην (2)  $u = \frac{dx}{dt}$  και

ολοκληρώνουμε.  $\int dx = \int \frac{k}{p}(1 - e^{-pt}) dt + C_1$ . Άρα  $x = \frac{k}{p}t + \frac{k}{p^2}e^{-pt} + C_1$ . Αλλά για  $t = 0$  είναι  $x = 0$ .

Συνεπώς  $C_1 = -\frac{k}{p^2}$ . Τελικά  $x = \frac{k}{p}t - \frac{k}{p^2}(1 - e^{-pt})$  (3).

Η (3) γράφεται  $px = kt - \frac{k}{p}(1 - e^{-pt})$  (4). Από τις (4) και (2) συνεπάγεται η σχέση  $px = kt - u$ .

**Συζήτηση.** Από την (2) συμπεραίνουμε ότι όταν  $t \rightarrow \infty$  η ταχύτητα τείνει σε ένα όριο, το  $u \rightarrow \frac{k}{p}$ . Επίσης

από την (3) διαπιστώνουμε ότι όταν  $t \rightarrow \infty$  το διανυθέν διάστημα  $x \rightarrow \frac{k}{p}t$ . Λαμβάνοντας υπ' όψιν την

έκφραση της ταχύτητας όταν  $t \rightarrow \infty$ , η σχέση  $x = \frac{k}{p}t$  σημαίνει ότι το διανυθέν διάστημα σε χρόνο  $t$  θα

είναι ίσο με το διάστημα που το σώμα θα είχε διανύσει αν ευθύς εξ αρχής είχε σταθερή ταχύτητα  $u = \frac{k}{p}$ , η

οποία είναι τελική, οριακή και μέγιστη.

3. Όχημα μάζας  $m = 500\text{kg}$  διέρχεται από την αρχή Ο του άξονα  $x$  με ταχύτητα  $u_0 = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  και κινείται στον θετικό ημιάξονα  $Ox$  υπό την επίδραση της δυνάμεως  $F = 1000 + 20x$ , η οποία μετρείται σε Ν. Να ευρεθεί η ταχύτητα του οχήματος συναρτήσει του διανυθέντος διαστήματος και να υπολογιστεί ο χρόνος εντός του οποίου διανύονται τα πρώτα 100m, καθώς και τα επόμενα 100m.

**Απάντηση:** (α)  $u = \left(\frac{1}{5}x + 10\right) \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , (β)  $t_1 = 5 \ln 3$ , (γ)  $t_2 = 5 \ln \frac{5}{3}$ .

**Υπόδειξη:** Γράφουμε τη διαφορική εξίσωση της κινήσεως της οποίας το δεξιό μέλος είναι η έκφραση  $F = 1000 + 20x$ . Ακολουθώντας επιλέγουμε την κατάλληλη έκφραση της επιταχύνσεως, με την οποία θα καταστεί δυνατή η ολοκλήρωση. Η επιτάχυνση  $\ddot{x}$  εκφράζεται υπό τις ακόλουθες μορφές:

$$\ddot{x} = \frac{du}{dt}, \quad \ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad \ddot{x} = \frac{du}{dx} \frac{dx}{dt} = u \frac{du}{dx}.$$

**Λύση.** Η εξίσωση της κινήσεως είναι  $m\ddot{x} = 1000 + 20x$  (1).

Η μορφή του δεξιού μέλους της (1) μας υποδεικνύει ότι προκειμένου να ολοκληρώσουμε την (1) πρέπει να

γράψουμε  $\ddot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dx} \frac{dx}{dt} = u \frac{du}{dx}$ . Έτσι η (1) γίνεται  $500u du = (1000 + 20x)dx$  και με ολοκλήρωση δίδει

$250u^2 = 1000x + 10x^2 + C$ . Η αρχική συνθήκη  $u = u_0$ ,  $x = 0$  δίδει  $C = 25000$ . Άρα

$$u^2 = \frac{1}{25}x^2 + 4x + 100 \Rightarrow u = \left(\frac{1}{5}x + 10\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (2).$$

Για τον προσδιορισμό του χρόνου εντός του οποίου διανύεται δοθέν διάστημα, αρκεί να θέσουμε στην (2)

$u = \frac{dx}{dt}$  και να ολοκληρώσουμε την προκύπτουσα παράσταση με τα αντίστοιχα όρια. Τοιούτοτρόπως

έχουμε  $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{1}{5}x + 10\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{5dx}{x + 50} = dt$ . Άρα  $5 \int_0^{100} \frac{dx}{x + 50} = t_1 \Rightarrow 5 \ln|x + 50| \Big|_0^{100} = t_1$ . Συνεπώς

$t_1 = 5 \ln 3$ . Τα πρώτα 100 μέτρα διανύονται σε χρόνο  $t_1 = \ln 3$  δευτερολέπτων.

Για τον προσδιορισμό του χρόνου εντός του οποίου διανύονται τα επόμενα 100 μέτρα χρησιμοποιούμε την

ίδια παράσταση με διαφορετικά όρια.  $5 \int_{100}^{200} \frac{dx}{x + 50} = t_2 \Rightarrow 5 \ln|x + 50| \Big|_{100}^{200} = t_2$ . Συνεπώς  $t_2 = 5 \ln \frac{5}{3}$ . Τα

επόμενα 100 μέτρα διανύονται σε χρόνο  $t_2 = 5 \ln \frac{5}{3}$  δευτερολέπτων.

4. Υλικό σημείο μάζας  $m$  βάλλεται κατακόρυφα από την επιφάνεια της Γης με αρχική ταχύτητα  $u_0$ . Το υλικό σημείο υπόκειται στην επίδραση δύο δυνάμεων. Της ελκτικής δυνάμεως της Γης, η οποία δίδεται από την σχέση  $\frac{mgR^2}{y^2}$ , όπου  $R$  είναι η ακτίνα της Γης και  $y$  είναι η απόσταση του σώματος από το κέντρο της ( $y \geq R$ ) και μιας σταθερής προωστικής δυνάμεως ίσης με  $\frac{mg}{4}$ , η οποία είναι κατακόρυφη και έχει φορά προς τα άνω. Να προσδιοριστεί η ταχύτητα του υλικού σημείου συναρτήσει της διανυθείσης αποστάσεως και να περιγραφεί το είδος της κινήσεως αν (α)  $u_0^2 < \frac{1}{2}gR$ , (β)  $u_0^2 > \frac{1}{2}gR$ .

**Απάντηση:** (α)  $\dot{y}^2 = u^2 = \frac{gy}{2} + \frac{2R^2g}{y} + u_0^2 - \frac{5gR}{4}$ , (β) Το βλήμα μηδενίζει την ταχύτητά του σε θέση  $y < 2R$ . Ακολούθως επιστρέφει στην επιφάνεια της Γης, (γ) Το βλήμα έχει ταχύτητα  $u \neq 0$  στη θέση  $y = 2R$  και ακολούθως επιταχύνεται, οπότε απομακρύνεται από την επιφάνεια της Γης συνεχώς.

**Υπόδειξη:** (α) Γράψτε τη διαφορική εξίσωση της κινήσεως  $m\ddot{y} = \sum F$ . Το δεξιό μέλος είναι το αλγεβρικό άθροισμα των συνιστωσών δυνάμεων, οι οποίες ασκούνται στο σώμα. Επομένως πρέπει σε κάθε μία εξ αυτών να θέσετε και το κατάλληλο πρόσημο. Ακολούθως επιλύστε τη διαφορική εξίσωση και προσδιορίστε τις σταθερές χρησιμοποιώντας τις αρχικές συνθήκες.

(β) Μελετήστε τη συμπεριφορά της ταχύτητας συναρτήσει του  $y$  και εξετάστε αν εμφανίζει μέγιστο ή ελάχιστο. Υπολογίστε την ταχύτητα του σώματος στη θέση  $y = 2R$ . Η τιμή της ταχύτητας στη θέση αυτή θα σας κατευθύνει σε λογικό συμπέρασμα για την κίνηση του σώματος.

(γ) Μελετήστε τη συμπεριφορά της ταχύτητας συναρτήσει του  $y$  και εξετάστε αν εμφανίζει μέγιστο ή ελάχιστο. Υπολογίστε την ταχύτητα του σώματος στη θέση  $y = 2R$ . Η τιμή της ταχύτητας στη θέση αυτή θα σας κατευθύνει σε λογικό συμπέρασμα για την κίνηση του σώματος. Βρείτε το πρόσημο της δυνάμεως, η οποία ασκείται στο σώμα μεταξύ των θέσεων  $y = R$  και  $y = 2R$  καθώς επίσης για  $y > 2R$ . Η τιμή της δυνάμεως στις περιοχές αυτές θα σας κατευθύνει σε λογικό συμπέρασμα για την κίνηση του σώματος.

**Λύση.** α) Η διαφορική εξίσωση της κινήσεως είναι  $m\ddot{y} = \frac{1}{4}mg - \frac{mgR^2}{y^2}$  (1) και οι αρχικές συνθήκες είναι  $\dot{y} = u_0$  όταν  $y = R$ .

Η λύση της (1) που ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες είναι  $\dot{y}^2 = u^2 = \frac{gy}{2} + \frac{2R^2g}{y} + u_0^2 - \frac{5gR}{2}$  (2).

Για να μελετήσουμε τον τρόπο με τον οποίο κινείται το σώμα θα υπολογίσουμε την παράγωγο της  $u$  ως προς  $y$  και θα εξετάσουμε αν έχει ακρότατο. Έχουμε  $\frac{du}{dy} = \frac{g}{2} - \frac{2R^2g}{y^2} = 0 \Rightarrow y = 2R$ . Για την τιμή αυτή

του  $y$  η δεύτερη παράγωγος  $\frac{d^2u}{dy^2} = \frac{4R^2g}{y^3} = \frac{g}{2R} > 0$ . Άρα για  $y = 2R$  η ταχύτητα παρουσιάζει τοπικό

ελάχιστο και είναι,  $u^2 = u_0^2 - \frac{1}{2}gR = \min$  (3).

β) Έστω  $u_0^2 < \frac{1}{2}gR$ . Η (3) δίδει  $u^2 < 0$ . Τούτο σημαίνει ότι το βλήμα δεν φθάνει στην θέση  $y = 2R$ . Η ταχύτητα συνεπώς του βλήματος μηδενίζεται προτού αυτό φθάσει σε ύψος  $y = 2R$ . Ακολούθως το βλήμα επιστρέφει στο έδαφος.

γ) Έστω  $u_0^2 > \frac{1}{2}gR$ . Η (3) δίδει  $u^2 > 0$ . Το βλήμα ξεκινά από το έδαφος με ταχύτητα  $u_0$  και σε ύψος

$y = 2R$  έχει ταχύτητα μικρότερη από  $u_0$  και ίση με  $u = \left(u_0^2 - \frac{1}{2}gR\right)^{1/2}$ , η οποία σύμφωνα με την (3),

είναι και η ελάχιστη. Επομένως από  $y = R$  έως  $y = 2R$  το βλήμα επιβραδύνεται. Και αν θέσουμε  $y = 2R$  στην εξίσωση της κινήσεως (1) προκύπτει ότι  $m\ddot{y} = 0$ . Δηλαδή στη θέση  $y = 2R$  η δύναμη που ασκείται στο σώμα λαμβάνει μηδενική τιμή. Το σώμα όμως έχει ταχύτητα διάφορο του μηδενός στη θέση αυτή και απομακρύνεται από τη Γη. Επομένως το σώμα θα κινηθεί πέραν της θέσεως  $y = 2R$ . Για  $y > 2R$  η (1) δίδει  $m\ddot{y} > 0$ , συνεπώς για  $y > 2R$  το βλήμα επιταχύνεται και μάλιστα καθώς το  $y$  αυξάνει ο

όρος  $\frac{mgR^2}{y^2}$  στο δεξιό μέλος της (1) ελαττώνεται και τείνει προς το μηδέν όταν το  $y$  τείνει προς το

άπειρο. Κατά συνέπεια η συνισταμένη (επιταχύνουσα) δύναμη αυξάνει την τιμή της προς το όριο  $m\ddot{y} = \frac{mg}{4}$ . Το βλήμα απομακρύνεται συνεχώς από την Γη και μεταβαίνει στο άπειρο. Η ταχύτητα του

βλήματος αυξάνει διότι η κίνηση είναι επιταχυνόμενη. Το μέτρο της ταχύτητας παρέχεται από την (2) οπότε συμπεραίνουμε ότι όταν το  $y \rightarrow \infty$  η ταχύτητα επίσης αποκτά άπειρη τιμή.

5. Εάν υλικό σημείο κινείται επί επιπέδου με ταχύτητα σταθερού μέτρου ναδειχθεί ότι το διάνυσμα της επιταχύνσεως είναι κάθετο στο διάνυσμα της ταχύτητας.

**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιείστε το σύμφυτο σύστημα αξόνων. Υπολογίστε την ταχύτητα  $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  και το μέτρο της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου. Ακολούθως προσδιορίστε το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα  $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dr} = \frac{\mathbf{u}}{u}$  ως συνάρτηση του  $t$ . Κατόπιν από την σχέση  $\mathbf{a} = \frac{du}{dt}\mathbf{T} + \frac{u^2}{R}\mathbf{N}$  προσδιορίστε τις ζητούμενες συνιστώσες της επιταχύνσεως.

**Λύση.** Ως γνωστόν, όταν υλικό σημείο  $P$  κινείται σε τυχαία καμπύλη, μπορούμε να περιγράψουμε την κίνηση χρησιμοποιώντας σύστημα κινουμένων αξόνων, οι οποίοι μετακινούνται μαζί με το κινητό. Το σύστημα αυτό καλείται σύμφυτο σύστημα αξόνων και οι άξονες έχουν την διεύθυνση της εφαπτομένης και της καθέτου προς την εφαπτομένη στο σημείο  $P$ . Αν  $\mathbf{T}$  και  $\mathbf{N}$  είναι τα μοναδιαία διανύσματα ως προς τις διευθύνσεις αυτές, οι εκφράσεις για την ταχύτητα και την επιτάχυνση στο σύμφυτο σύστημα είναι  $\mathbf{u} = u\mathbf{T}$  και  $\mathbf{a} = \frac{du}{dt}\mathbf{T} + \frac{u^2}{R}\mathbf{N}$ . Αλλά  $\frac{du}{dt} = 0$ . Άρα  $\mathbf{a} = \frac{u^2}{R}\mathbf{N}$ . Άρα η επιτάχυνση είναι κάθετη στην ταχύτητα.

6. Υλικό σημείο κινείται κατά μήκος καμπύλης και το διάνυσμα θέσεως αυτού είναι  $\mathbf{r} = t^3\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ , όπου  $t$  ο χρόνος. Να ευρεθούν τα μέτρα της επιτροχίου και κεντρομόλου επιταχύνσεως όταν  $t=2$ .

**Απάντηση:** Επιτρόχιος  $\frac{du}{dt} = \frac{38}{\sqrt{10}}$ , κεντρομόλος,  $\frac{u^2}{R} = \frac{2888}{3}$ .

**Υπόδειξη:** Χρησιμοποιείστε το σύμφυτο σύστημα αξόνων. Υπολογίστε την ταχύτητα  $\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$  και το μέτρο της ταχύτητας συναρτήσει του χρόνου. Ακολούθως προσδιορίστε το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα  $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dr} = \frac{\mathbf{u}}{u}$  ως συνάρτηση του  $t$ . Κατόπιν από την σχέση  $\mathbf{a} = \frac{du}{dt}\mathbf{T} + \frac{u^2}{R}\mathbf{N}$  προσδιορίστε τις ζητούμενες συνιστώσες της επιταχύνσεως.

**Λύση.** Ως γνωστόν  $\mathbf{a} = \frac{du}{dt}\mathbf{T} + \frac{u^2}{R}\mathbf{N}$ , όπου  $\frac{du}{dt}$  είναι η επιτρόχιος συνιστώσα και  $\frac{u^2}{R}$  είναι η κεντρομόλος.

Επίσης από την σχέση  $\mathbf{a} = \frac{du}{dt}\mathbf{T}$  και την  $\mathbf{u} = u\mathbf{T}$  προκύπτει  $\mathbf{a} = \frac{du}{dt}\mathbf{T} + u\frac{d\mathbf{T}}{dt}$ . Συνεπώς η ακτίνα καμπυλότητας  $R$  ευρίσκεται από την εξίσωση  $\frac{u^2}{R}\mathbf{N} = u\frac{d\mathbf{T}}{dt}$ , δηλαδή  $\frac{1}{R} = \frac{1}{u}\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right|$  (1).

Αρκεί λοιπόν να υπολογισθεί κατ' αρχάς η ταχύτητα και η  $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dr}$  ως συνάρτηση του  $t$ . Είναι

$d\mathbf{r} = [3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}]dt$  και  $dr = \sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2}dt$ . Αλλά  $u = \frac{dr}{dt}$ . Επομένως  $u = \sqrt{9t^4 + 4t^2}$ . Από αυτήν

έχουμε  $\frac{du}{dt} = \frac{18t^2 + 4}{\sqrt{9t^2 + 4}}$  (2).

Για  $t=2$  η (2) δίδει  $\frac{du}{dt} = 14,24$ . Επίσης από τον ορισμό  $\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{dr}$ , ευρίσκουμε

$\mathbf{T} = \frac{3t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}}{\sqrt{(3t^2)^2 + (2t)^2}} = \frac{3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}}{\sqrt{9t^2 + 4}}$  (3).

Από την (3) ευρίσκουμε το  $\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{12\mathbf{i} - 18t\mathbf{j}}{(9t^2 + 4)\sqrt{9t^2 + 4}}$  και ακολούθως το  $\left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| = \frac{6}{9t^2 + 4}$ , οπότε από την (1) υπολογίζεται πλέον για  $t=2$  η ακτίνα καμπυλότητας  $R=84,33$ . Κατά συνέπεια η κεντρομόλος συνιστώσα της επιταχύνσεως ισούται με  $\frac{u^2}{R} = \frac{(4\sqrt{10})^2}{3/20} = 1,89$ .

**Σημείωση:** Από την σχέση  $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1 \Rightarrow 2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{ds} = 0$  συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα  $\mathbf{T}$  και  $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$  είναι κάθετα μεταξύ τους. Το διάνυσμα  $\frac{d\mathbf{T}}{ds}$  συμβολίζουμε με  $\kappa\mathbf{N}$ , όπου  $\kappa$  αριθμός με διαστάσεις αντιστρόφου μήκους καλούμενος καμπυλότητα και  $\mathbf{N}$  μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο  $\mathbf{T}$  και έχον φορά προς τα κοίλα της καμπύλης. Το επίπεδο των διανυσμάτων  $\mathbf{T}$  και  $\mathbf{N}$  καλείται εγγύτατο επίπεδο της καμπύλης στο σημείο P. Η καμπυλότητα και η ακτίνα καμπυλότητας  $R$  είναι σε κάθε σημείο της καμπύλης αντίστροφοι αριθμοί, δηλαδή  $\kappa R = 1$ . Συνεπώς  $\kappa = \frac{1}{R} = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$ . Αλλά  $\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt}$ . Άρα  $\frac{1}{R} = \frac{1}{u} \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right|$ .

## Έργο δυνάμεως . Διατηρητικά πεδία.

**1.** Να ευρεθεί το έργο που παράγεται από την δύναμη  $\mathbf{F} = \alpha y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$  επί ενός υλικού σημείου, το οποίο κινείται από το σημείο A(0,α) στο σημείο B(α,0) α) κατά μήκος της ευθείας  $x + y = \alpha$ , β) κατά μήκος του κύκλου  $x^2 + y^2 = \alpha^2, x > 0, y > 0$ .

**Υπόδειξη:** Γράψτε τον τύπο του στοιχειώδους έργου της δύναμews  $\mathbf{F}$  για διαδρομή  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$  και ολοκληρώστε κατά μήκος της διαδρομής C, την οποία δίδει το πρόβλημα. Αν η διαδρομή C είναι της μορφής  $f(x,y)=0$ , τότε εκφράζουμε το y συναρτήσει του x (ή αντίστροφα) ούτως ώστε στο ολοκλήρωμα να έχουμε μία μεταβλητή.

**Απάντηση:** (α)  $W = \frac{\alpha^3}{6}$ , (β)  $W = \alpha^3 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right)$ .

**Λύση.** α) Το έργο της δυνάμεως υπολογίζεται από την σχέση  $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , όπου  $\mathbf{F} = \alpha y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$  και C είναι ο δρόμος  $x + y = \alpha$  κατά μήκος του οποίου εκτελείται η κίνηση. Γνωρίζουμε ότι  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ .

Επομένως  $W = \int_C (\alpha y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C \alpha y dx + \int_C x^2 dy$ .

Στο πρώτο ολοκλήρωμα  $\int_C \alpha y dx$  η ολοκλήρωση γίνεται ως προς x, το οποίο μεταβάλλεται στο διάστημα

(0,α). Επομένως αντικαθιστούμε το y με το ίσο του  $y = \alpha - x$  οπότε έχουμε  $I_1 = \int_0^\alpha \alpha(\alpha - x) dx = \frac{\alpha^3}{2}$ .

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα  $\int_C x^2 dy$  η ολοκλήρωση τελείται ως προς y, το οποίο μεταβάλλεται στο διάστημα

(α,0). Αντικαθιστούμε συνεπώς στην ολοκληρωτέα παράσταση το  $x^2$  με το ίσο του  $x^2 = (\alpha - y)^2$  και το ολοκλήρωμα γίνεται  $I_2 = \int_\alpha^0 (\alpha - y)^2 dy = -\frac{\alpha^3}{3}$ .

Τελικά λαμβάνουμε  $W = I_1 + I_2 = \frac{\alpha^3}{6}$ .

β) Το έργο της δυνάμεως υπολογίζεται από την σχέση  $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , όπου  $\mathbf{F} = \alpha y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$  και C είναι ο

δρόμος  $x^2 + y^2 = \alpha^2, x > 0, y > 0$  κατά μήκος του οποίου εκτελείται η κίνηση. Γνωρίζουμε ότι  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ .

Επομένως  $W = \int_C (\alpha y\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C \alpha y dx + \int_C x^2 dy$ . Παρατηρούμε ότι η διαδρομή είναι το

τεταρτοκύκλιο  $x^2 + y^2 = \alpha^2, x > 0, y > 0$ .

Στο πρώτο ολοκλήρωμα  $\int_C \alpha y dx$  η ολοκλήρωση γίνεται ως προς x, το οποίο μεταβάλλεται στο διάστημα

(0,α). Επομένως αντικαθιστούμε το y με το ίσο του  $y = \sqrt{\alpha^2 - x^2}$  και έχουμε πλέον να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα  $I_1 = \int_0^\alpha \alpha \sqrt{\alpha^2 - x^2} dx$ . Θέτουμε  $x = \alpha \cos \theta$ . Τα όρια του θ είναι  $\pi/2$  και μηδέν. Άρα το



ολοκλήρωμα γράφεται  $I_1 = \int_{\pi/2}^0 \alpha \alpha \sin \theta (-\alpha \sin \theta d\theta) = - \int_{\pi/2}^0 \alpha^3 \sin^2 \theta d\theta$ . Αλλά  $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$ .

Επομένως  $I_1 = - \int_{\pi/2}^0 \alpha^3 \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\alpha^3 \pi}{4}$ .

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα  $\int_C x^2 dy$  η ολοκλήρωση τελείται ως προς  $y$ , το οποίο μεταβάλλεται στο διάστημα

$(\alpha, 0)$ . Αντικαθιστούμε συνεπώς στην ολοκληρωτέα παράσταση το  $x^2$  με το ίσο του  $x^2 = \alpha^2 - y^2$  και έχουμε  $I_2 = \int_{\alpha}^0 (\alpha^2 - y^2) dy = -\frac{2\alpha^3}{3}$ .

Άρα  $W = \alpha^3 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{2}{3} \right)$ .

2. Να ευρεθεί το έργο που παράγεται από την δύναμη  $\mathbf{F} = xy(\mathbf{i} + \mathbf{j})$  επί ενός υλικού σημείου, το οποίο κινείται από το σημείο A(0,α) στο σημείο B(α,0) α) κατά μήκος του κύκλου  $x^2 + y^2 = \alpha^2, x > 0, y > 0$ , β) κατά μήκος της ευθείας  $x + y = \alpha$ . Από τα αποτελέσματα συμπεραίνετε ότι η δύναμη είναι διατηρητική;

**Απάντηση:** (α)  $W = 0$ . (β)  $W = 0$ , (γ) Όχι, δεν συμπεραίνουμε. Πρέπει να εξετάσουμε αν ισχύει η συνθήκη  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ . Παρατηρούμε ότι τούτο είναι αληθές, επομένως η δύναμη είναι διατηρητική.

**Υπόδειξη:** Γράφουμε τον τύπο του στοιχειώδους έργου της δύναμης  $\mathbf{F}$  για διαδρομή  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$  και ολοκληρώνουμε κατά μήκος της διαδρομής  $C$ , την οποία δίδει το πρόβλημα. Αν η διαδρομή  $C$  είναι της μορφής  $f(x,y) = 0$ , τότε εκφράζουμε το  $y$  συναρτήσει του  $x$  (ή αντίστροφα) ούτως ώστε στο ολοκλήρωμα να έχουμε μία μεταβλητή.

**Λύση.** Α) Το έργο της δύναμης υπολογίζεται από την σχέση  $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , όπου  $\mathbf{F} = xy(\mathbf{i} + \mathbf{j})$  και  $C$

είναι ο δρόμος  $x^2 + y^2 = \alpha^2, x > 0, y > 0$  κατά μήκος του οποίου εκτελείται η κίνηση. Γνωρίζουμε ότι  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ . Επομένως  $W = \int_C (xy^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C xy^2 dx + \int_C yx^2 dy$ . Παρατηρούμε ότι η

διαδρομή είναι το τεταρτοκύκλιο  $x^2 + y^2 = \alpha^2, x > 0, y > 0$ .

Στο πρώτο ολοκλήρωμα  $\int_C xy^2 dx$  η ολοκλήρωση γίνεται ως προς  $x$ , το οποίο μεταβάλλεται στο διάστημα

(0,α). Επομένως αντικαθιστούμε το  $y^2$  με το ίσο του  $y^2 = \alpha^2 - x^2$  και έχουμε πλέον να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα  $I_1 = \int_0^\alpha x(\alpha^2 - x^2) dx$ . Επομένως  $I_1 = \frac{\alpha^4}{4}$ .

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα  $\int_C yx^2 dy$  η ολοκλήρωση τελείται ως προς  $y$ , το οποίο μεταβάλλεται στο

διάστημα (α,0). Αντικαθιστούμε συνεπώς στην ολοκληρωτέα παράσταση το  $x^2$  με το ίσο του  $x^2 = \alpha^2 - y^2$ . Έχουμε, επομένως  $I_2 = \int_\alpha^0 (\alpha^2 - y^2)y dy = -\frac{\alpha^4}{4}$ .

Άρα  $W = I_1 + I_2 = 0$ .

Β) Το έργο της δύναμης υπολογίζεται από την σχέση  $W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ , όπου  $\mathbf{F} = xy(\mathbf{i} + \mathbf{j})$  και  $C$  είναι ο

δρόμος  $x + y = \alpha$  κατά μήκος του οποίου εκτελείται η κίνηση. Γνωρίζουμε ότι  $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$ . Επομένως

$$W = \int_C (xy^2\mathbf{i} + yx^2\mathbf{j}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}) = \int_C xy^2 dx + \int_C yx^2 dy.$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα  $\int_C xy^2 dx$  η ολοκλήρωση γίνεται ως προς  $x$ , το οποίο μεταβάλλεται στο διάστημα

(0,α). Επομένως αντικαθιστούμε το  $y$  με το ίσο του  $y = \alpha - x$  οπότε έχουμε  $I_1 = \int_0^\alpha x(\alpha - x)^2 dx = \frac{\alpha^4}{12}$ .

Στο δεύτερο ολοκλήρωμα  $\int_C x^2 y dy$  η ολοκλήρωση τελείται ως προς  $y$ , το οποίο μεταβάλλεται στο

διάστημα (α,0). Αντικαθιστούμε συνεπώς στην ολοκληρωτέα παράσταση το  $x^2$  με το ίσο του  $x^2 = (\alpha - y)^2$  και το ολοκλήρωμα γίνεται  $I_2 = \int_\alpha^0 (\alpha - y)^2 y dy = -\frac{\alpha^4}{12}$ .

Τελικά λαμβάνουμε  $W = I_1 + I_2 = 0$ .

Παρατηρούμε ότι το έργο της δύναμης  $\mathbf{F} = xy(y\mathbf{i} + x\mathbf{j})$  από το σημείο  $A(0, \alpha)$  στο σημείο  $B(\alpha, 0)$  κατά μήκος του κύκλου  $x^2 + y^2 = \alpha^2, x > 0, y > 0$  ή κατά μήκος της ευθείας  $x + y = \alpha$  είναι το ίδιο ( ισούται με μηδέν) δηλαδή είναι ανεξάρτητο των συγκεκριμένων διαδρομών. Για να αποφανθούμε ότι η δύναμη είναι διατηρητική ή όχι, αυτό δεν αρκεί. Είτε πρέπει να υπολογίσουμε το έργο της κατά μήκος οιασδήποτε διαδρομής είτε πρέπει να αποδείξουμε ότι η δύναμη απορρέει από δυναμική συνάρτηση, πράγμα ισοδύναμο με την σχέση  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ . Εξετάζουμε συνεπώς την τιμή της παραστάσεως  $\nabla \times \mathbf{F}$  και παρατηρούμε ότι πράγματι ισχύει  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ . Επομένως η δύναμη είναι διατηρητική.

3. Να αποδειχθεί ότι η δύναμη  $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j}$  απορρέει από δυναμική συνάρτηση και να προσδιοριστεί αυτή.

**Απάντηση:** (α) Ναι, απορρέει από δυναμική συνάρτηση διότι  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ . (β) Η δυναμική συνάρτηση είναι η  $U = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3 + c$ .

**Υπόδειξη:** (α) Ευρίσκουμε τον στροβιλισμό  $\nabla \times \mathbf{F}$ . (β) Χρησιμοποιούμε την σχέση  $\mathbf{F} = -\nabla U$ , την οποία αναλύουμε σε συνιστώσες και ακολουθώντας ολοκληρώνουμε.

**Λύση.** Για να απορρέει η δύναμη από δυναμική συνάρτηση πρέπει να ισχύει  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ .

$$\text{Είναι } \nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & y^2 & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \left\{ \frac{\partial(0)}{\partial y} - \frac{\partial(y^2)}{\partial z} \right\} - \mathbf{j} \left\{ \frac{\partial(0)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial z} \right\} + \mathbf{k} \left\{ \frac{\partial(y^2)}{\partial x} - \frac{\partial(x^2)}{\partial y} \right\} = 0. \text{ Άρα η δύναμη}$$

απορρέει από δυναμική συνάρτηση.

Γνωρίζουμε ότι η σχέση  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$  είναι ισοδύναμη με την σχέση  $\mathbf{F} = -\nabla U$ . Η έκφραση αυτή μεταφράζεται στις ακόλουθες τρεις σχέσεις.

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -F_z.$$

Στο παρόν πρόβλημα είναι  $F_x = x^2, F_y = y^2, F_z = 0$ .

Επομένως έχουμε για επίλυση τις ακόλουθες τρεις εξισώσεις

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -x^2 \quad (1), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -y^2 \quad (2), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (3).$$

Ολοκληρώνουμε την (1) ως προς  $x$  θεωρώντας όλες τις άλλες μεταβλητές, που περιέχονται σε αυτήν, σταθερές. Η (1) λοιπόν δίνει  $U = -\frac{1}{3}x^3 + f(y, z)$  (4).

Παρατηρούμε ότι στην ολοκλήρωση αυτή ως προς  $x$ , η σταθερά της ολοκληρώσεως αντικαθίσταται από μία άγνωστη συνάρτηση των  $y$  και  $z$ .

Παραγωγίζουμε την (4) ως προς  $y$  και παίρνουμε  $\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}$  (5).

Από τις (2) και (5) προκύπτει  $\frac{\partial f}{\partial y} = -y^2$ . Από αυτήν με ολοκλήρωση ως προς  $y$  προκύπτει

$$f(x, y) = -\frac{1}{3}y^3 + g(z) \quad (6).$$

Κατά συνέπεια η (4) παίρνει την μορφή  $U = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3 + g(z)$  (7).

Παραγωγίζουμε τελικά την (7) ως προς  $z$  και έχουμε  $\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{dg}{dz}$  (8).

Από τις (8) και (3) προκύπτει ότι  $\frac{dg}{dz} = 0 \Rightarrow g = c$ , δηλαδή η  $g$  είναι στο παρόν παράδειγμα σταθερά,

ανεξάρτητη των  $x, y, z$ . Άρα  $U = -\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{3}y^3 + c$ .

4. Να αποδειχθεί ότι η δύναμη  $\mathbf{F} = e^{-x}(-yz\mathbf{i} + z\mathbf{j} + y\mathbf{k})$  απορρέει από δυναμική συνάρτηση και να προσδιοριστεί αυτή.

**Απάντηση:** (α) Ναι, απορρέει από δυναμική συνάρτηση διότι  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ . (β) Η δυναμική συνάρτηση είναι η  $U = -yze^{-x} + c$ .

**Υπόδειξη:** (α) Ευρίσκουμε τον στροβιλισμό  $\nabla \times \mathbf{F}$ . (β) Χρησιμοποιούμε την σχέση  $\mathbf{F} = -\nabla U$ , την οποία αναλύουμε σε συνιστώσες και ακολουθώς ολοκληρώνουμε.

**Λύση.** Για να απορρέει η δύναμη από δυναμική συνάρτηση πρέπει να ισχύει  $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ . Είναι

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -yze^{-x} & ze^{-x} & ye^{-x} \end{vmatrix}. \text{ Επομένως}$$

$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{i} \left\{ \frac{\partial(ye^{-x})}{\partial y} - \frac{\partial(ze^{-x})}{\partial z} \right\} - \mathbf{j} \left\{ \frac{\partial(ye^{-x})}{\partial x} - \frac{\partial(-yze^{-x})}{\partial z} \right\} + \mathbf{k} \left\{ \frac{\partial(ze^{-x})}{\partial x} - \frac{\partial(-yze^{-x})}{\partial y} \right\} = 0$$

Άρα η δύναμη απορρέει από δυναμική συνάρτηση. Την δυναμική συνάρτηση  $U$  θα προσδιορίσουμε από την σχέση  $\mathbf{F} = -\nabla U$ . Η έκφραση αυτή γράφεται

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -F_x, \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y, \frac{\partial U}{\partial z} = -F_z. \text{ όπου } F_x = -yze^{-x}, F_y = ze^{-x}, F_z = ye^{-x}. \text{ Επομένως έχουμε για επίλυση}$$

$$\text{τις ακόλουθες τρεις εξισώσεις } \frac{\partial U}{\partial x} = yze^{-x} \quad (1), \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -ze^{-x} \quad (2), \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -ye^{-x} \quad (3).$$

Ολοκληρώνουμε την (1) ως προς  $x$  θεωρώντας όλες τις άλλες μεταβλητές που περιέχονται σε αυτήν, σταθερές. Η (1) λοιπόν δίνει  $U = -yze^{-x} + f(y, z)$  (4).

Παρατηρούμε ότι στην ολοκλήρωση αυτή ως προς  $x$ , η σταθερά της ολοκληρώσεως αντικαθίσταται από μία άγνωστη συνάρτηση των  $y$  και  $z$ . Παραγωγίζουμε εν συνεχεία την (4) ως προς  $y$  και παίρνουμε  $\frac{\partial U}{\partial y} = -ze^{-x} + \frac{\partial f}{\partial y}$  (5).

Από τις (2) και (5) προκύπτει  $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ . Επομένως η  $f$  είναι ανεξάρτητη του  $y$ . Άρα  $f(y, z) = f(z)$  (6).

Κατόπιν τούτου η (4) παίρνει την μορφή  $U = -yze^{-x} + f(z)$  (7).

Παραγωγίζουμε ακολουθώς την (7) ως προς  $z$  και έχουμε  $\frac{\partial U}{\partial z} = -ye^{-x} + \frac{df}{dz}$  (8).

Από τις (8) και (3) προκύπτει ότι  $\frac{df}{dz} = 0 \Rightarrow f = c$ , δηλαδή η  $f$  είναι σταθερά, ανεξάρτητη των  $x, y, z$ .

Τελικά  $U = -yze^{-x} + c$ .