

Πεδία Κεντρικών Δυνάμεων

1. Να αποδειχθεί ότι αν η τροχιά υλικού σημείου σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων είναι η $r=a\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\theta\right)$,

όπου r, θ πολικές συντεταγμένες, οι κεντρικές δυνάμεις είναι ανάλογες προς $\left(\frac{1}{r^4}+\frac{\alpha}{3r^5}\right)$.

Απάντηση: $F(r)=-\frac{3\alpha L^2}{m}\left(\frac{1}{r^4}+\frac{\alpha^2}{3r^5}\right)$, όπου L είναι η σταθερά της στροφορμής και m η μάζα του σώματος.

Υπόδειξη: Όταν η τροχιά δίδεται από σχέση της μορφής $r=r(\theta)$ και ζητείται η τιμή της κεντρικής

δυνάμεως, χρησιμοποιούμε την διαφορική εξίσωση $\frac{d^2r}{d\theta^2}-\frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r=F(r)\frac{mr^4}{L^2}$ ή την

$\frac{d^2\lambda}{d\theta^2}+\lambda=-\frac{m}{L^2\lambda^2}F(r)$, όπου $\lambda=\frac{1}{r}$. Στην παρούσα άσκηση χρησιμοποιούμε την διαφορική εξίσωση

$\frac{d^2r}{d\theta^2}-\frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r=F(r)\frac{mr^4}{L^2}$. Υπολογίζουμε την $\frac{dr}{d\theta}$ και την $\frac{d^2r}{d\theta^2}$ από την $r=a\left(1+\frac{\sqrt{6}}{2}\cos\theta\right)$ και από τις

εκφράσεις αυτές απαλείφουμε την γωνία θ , ούτως, ώστε να έχουμε τα $\frac{dr}{d\theta}$ και $\frac{d^2r}{d\theta^2}$ να καταστούν

συναρτήσεις του r μόνο.

Λύση. Θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση $\frac{d^2r}{d\theta^2}-\frac{2}{r}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2-r=F(r)\frac{mr^4}{L^2}$ (1).

Έχουμε $r=a+\frac{\alpha\sqrt{6}}{2}\cos\theta$ (2). Άρα $\frac{dr}{d\theta}=-\frac{\alpha\sqrt{6}}{2}\sin\theta$ και $\frac{d^2r}{d\theta^2}=-\alpha-r$ και

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{6\alpha}{4}\sin^2\theta=\frac{3}{2}\alpha^2(1-\cos^2\theta)=\frac{3}{2}\alpha^2-\frac{3}{2}\alpha^2\cos^2\theta.$$

Επίσης από την (2) προκύπτει

$$(r-\alpha)^2=\frac{3}{2}\alpha^2\cos^2\theta. \text{ Επομένως } \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2=\frac{3}{2}\alpha^2-(r-\alpha)^2.$$

Επομένως η (1) γίνεται

$$\alpha-r-\frac{2}{r}\left[\frac{3}{2}\alpha^2-(r-\alpha)^2\right]-r=F(r)\frac{mr^4}{L^2}\Rightarrow \alpha-2r-\frac{3}{r}\alpha^2+\frac{2}{r}(r^2+\alpha^2-2\alpha r)=F(r)\frac{mr^4}{L^2}\Rightarrow$$

$$\alpha-2r-\frac{3}{r}\alpha^2+2r+\frac{2\alpha^2}{r}-4\alpha=F(r)\frac{mr^4}{L^2}. \text{ Όμως } -3\alpha-\frac{\alpha^2}{r}=-3\alpha\left(1+\frac{\alpha^2}{3r}\right).$$

Άρα, τελικώς

$$F(r) = -\frac{3\alpha L^2}{m} \left(\frac{1}{r^4} + \frac{\alpha^2}{3r^5} \right).$$

2. α) Υλικό σημείο $P(m)$ γράφει την επίπεδη καμπύλη $r(\theta+1)^2 = a$, όπου a σταθερά, υπό την επίδραση κεντρικής δυνάμεως. Να ευρεθεί ο νόμος της δυνάμεως. β) Κατά την στιγμή κατά την οποία το σωματίδιο διέρχεται από την θέση $\theta = 0$, δέχεται ώθηση κατά την φορά της κινήσεώς του, η οποία μηδενίζει την ακτινική συνιστώσα της ταχύτητάς του και διπλασιάζει την εγκάρσια. Να αποδειχθεί ότι το κινητό θα γράψει την καμπύλη $r = \frac{3a}{2 + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta\right)}$.

Απάντηση: α) $F = -\frac{L_0^2}{ma} \left[\frac{2}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3} \right]$, όπου L είναι η σταθερά της στροφορμής και m η μάζα του σώματος,

$$(\beta) \quad r = \frac{3a}{2 + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta\right)}.$$

Υπόδειξη: Χρησιμοποιούμε την διαφορική εξίσωση $\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r = \frac{mr^4}{L_0^2} F(r)$ και υπολογίζουμε την έκφραση της δυνάμεως. Η σχέση, την οποία θα εξαγάγουμε, εκφράζεται συναρτήσει του L_0 . Για το δεύτερο ερώτημα θα χρησιμοποιήσουμε την σχέση $\frac{d^2\lambda}{d\theta^2} + \lambda = -\frac{m}{L^2\lambda^2} F(r)$, όπου $\lambda = \frac{1}{r}$, στην οποία θα θέσουμε $L = 2L_0$, σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος.

Λύση. Η εξίσωση της κινήσεως είναι $\frac{d^2r}{d\theta^2} - \frac{2}{r} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r = \frac{mr^4}{L_0^2} F(r)$. Υπολογίζουμε τις παραγώγους του r

ως προς θ . Έχουμε $\frac{dr}{d\theta} = -\frac{2a}{(\theta+1)^3}$, $\frac{d^2r}{d\theta^2} = \frac{6a}{(\theta+1)^4}$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της κινήσεως και

$$\text{ευρίσκουμε } F = -\frac{L_0^2}{ma} \left[\frac{2}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3} \right].$$

Στη θέση $\theta = 0$, το κινητό δέχεται ώθηση κατά την φορά της κινήσεώς του, η οποία μηδενίζει την ακτινική συνιστώσα της ταχύτητάς του και διπλασιάζει την εγκάρσια. Επομένως η στροφορμή του γίνεται $L = 2L_0$.

Για να προσδιορίσουμε την μορφή της καμπύλης που θα γράψει το κινητό, θα χρησιμοποιήσουμε την

διαφορική εξίσωση της κινήσεως $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{L^2} F(r)$, όπου $F = -\frac{L_0^2}{ma} \left[\frac{2}{r^2} + \frac{\alpha}{r^3} \right]$ και $L = 2L_0$.

Θέτουμε $\frac{1}{r} = \lambda$, οπότε η εξίσωση γράφεται, $\frac{d^2\lambda}{d\theta^2} + \lambda = \frac{1}{2a} + \frac{\lambda}{4} \Rightarrow \frac{d^2\lambda}{d\theta^2} + \frac{3}{4}\lambda = \frac{1}{2a}$ και έχει λύση την

$\frac{1}{r} = A \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta + \theta_0)\right) + \frac{2}{3\alpha}$ (1). Οι αρχικές συνθήκες είναι $\theta = 0$, $r = \alpha$ και $\dot{r} = 0$. (Να προσέξουμε ότι

στη θέση $\theta=0$ η αρχική εξίσωση της κινήσεως δίδει $r = \alpha$). Η (1) δίδει $-\frac{\dot{r}}{r^2} = -A\dot{\theta} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(\theta + \theta_0)\right)$ (2).

Εφαρμόζουμε τις αρχικές συνθήκες στις (1) και (2) και ευρίσκουμε $\theta_0 = 0$, $A = \frac{1}{3\alpha}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο

έχουμε τελικά $r = \frac{3\alpha}{2 + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\theta\right)}$.

3. Υλικό σημείο κινείται σε έλλειψη. Να αποδειχθεί η σχέση μεταξύ της περιόδου της περιφοράς και του μήκους του μεγάλου ημιάξονα.

Απάντηση: $T^2 = \frac{4\pi^2 m}{k} \alpha^3$.

Υπόδειξη: Από τον τύπο της εμβαδικής ταχύτητας $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$, όπου $S = \pi ab = \pi \alpha^2 \sqrt{1-e^2}$ είναι το εμβαδόν της ελλείψεως, προκύπτει με ολοκλήρωση η ζητούμενη σχέση.

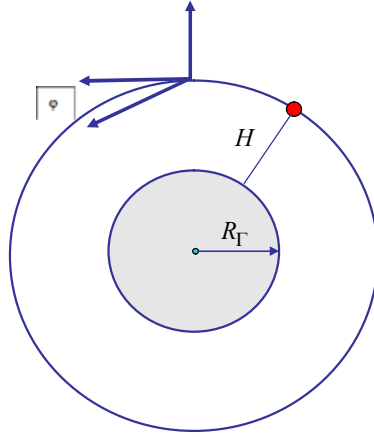
Λύση. Είναι γνωστό ότι η εμβαδική ταχύτητα είναι σταθερή και ίση με $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$. Συνεπώς

$\int dt = \frac{2m}{L} \int dS \Rightarrow T = \frac{2m}{L} S$. Το εμβαδόν της ελλείψεως ισούται με $S = \pi ab = \pi \alpha^2 \sqrt{1-e^2}$. Επομένως

$$T^2 = \frac{4\pi^2 m^2 \alpha^4 (1-e^2)}{L^2} = \frac{4\pi^2 m^2 \alpha^2 p}{pmk} = \frac{4\pi^2 m}{k} \alpha^3. \quad (\text{ Στην εξαγωγή της τελικής εκφράσεως}$$

χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις $p = \alpha(1-e^2)$ και $L^2 = pmk$).

4. Δορυφόρος κινείται σε κυκλική τροχιά περί την Γη σε ύψος H από την επιφάνεια αυτής. Η Γη θεωρείται σφαιρική ακτίνας R , ομογενής και ακίνητη. Σε κάποιο σημείο της τροχιάς η διεύθυνση της κινήσεως αλλάζει κατά γωνία φ και στρέφεται προς την Γη χωρίς να μεταβληθεί το μέτρο της ταχύτητας. Να αποδειχθεί ότι ο δορυφόρος θα επιστρέψει στην Γη υπό την προϋπόθεση ότι $\sin \varphi \geq \frac{H}{R+H}$.



Υπόδειξη: Οι εξισώσεις που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η εξίσωση της κεντρομόλου δύναμews, η εξίσωση της στροφορμής αμέσως μετά την εκτροπή του δορυφόρου και η εξίσωση της μηχανικής ενέργειας. Ο δορυφόρος γράφει ελλειπτική τροχιά γύρω από την Γη και εφ'όσον θα υπάρξει συνάντηση με την Γη πρέπει η ελάχιστη απόσταση του δορυφόρου από το ελκτικό κέντρο να γίνει ίση με την ακτίνα της Γης.

Λύση. Η Νευτώνεια έλξη ενεργεί ως κεντρομόλος δύναμη στον δορυφόρο, άρα

$$\frac{mu^2}{R+H} = \frac{k}{(R+H)^2} \Rightarrow u = \sqrt{\frac{k}{m(R+H)}}.$$

Η στροφορμή αμέσως μετά την εκτροπή του δορυφόρου κατά γωνία φ , ισούται με $L = mu(R+H)\cos \varphi$.

Η ενέργεια του δορυφόρου επίσης είναι ίση με $E = \frac{1}{2}mu^2 - \frac{k}{R+H} = -\frac{k}{2(R+H)} < 0$. Επομένως κινείται

πλέον σε ελλειπτική τροχιά. Στην ελλειπτική τροχιά το μήκος του μεγάλου ημιάξονα δίδεται από την

$$\text{σχέση } \alpha = -\frac{k}{2E} \Rightarrow \alpha = R+H.$$

Επίσης στην ελλειπτική τροχιά η ελάχιστη απόσταση του ελκτικού κέντρου από την ελλειπτική τροχιά

ισούται με $r_{\min} = \alpha(1-e)$. Αλλά $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$. Αντικαθιστούμε στην τελευταία τα E και L με τα ίσα

τους, οπότε, μετά από πράξεις, $e = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sin \varphi$.

Για να προσκρούσει ο δορυφόρος στην Γη πρέπει $r_{\min} \leq R \Rightarrow (R+H)(1 - \sin \varphi) \leq R \Rightarrow \sin \varphi \geq \frac{H}{R+H}$.

5. (α) Να μελετηθεί ως προς την ευστάθεια η κυκλική τροχιά όταν η δύναμη που ασκείται στο κινητό δίδεται από την σχέση $\mathbf{F} = -\frac{k}{r^2} \mathbf{e}_r$. **(β)** Να μελετηθεί η ευστάθεια των κυκλικών τροχιών αν $F = -k/r^n$, όπου k θετική σταθερά.

Απάντηση: **(α)** Η τροχιά είναι ευσταθής. **(β)** Ευσταθείς είναι οι κυκλικές τροχιές για $\frac{3-n}{\alpha} > 0$ ή για $n < 3$ και ασταθείς για $n > 3$.

Υπόδειξη: Θεωρούμε υλικό σημείο $P(m)$ το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα σε κύκλο ακτίνας α . Η

εξίσωση της κινήσεως σε πολικές συντεταγμένες δίδει $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$ και $\frac{m}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$. Επειδή η

τροχιά είναι κύκλος με ακτίνα α , ισχύει $r = \alpha$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ και $L = m\alpha^2\dot{\theta} = \text{σταθερό}$, οπότε $\dot{\theta} = \text{σταθερό}$. Στην κυκλική κίνηση υπό την επίδραση κεντρικής μόνον δυνάμεως το μέτρο της ταχύτητας είναι σταθερό και ίσο με $u = \dot{\theta}\alpha$. Κατόπιν των ανωτέρω η εξίσωση της κυκλικής κινήσεως γράφεται ως

εξής $F(\alpha) + \frac{L^2}{m\alpha^3} = 0$ (1). Ως γνωστόν, η κίνηση υλικού σημείου επί της επιβατικής του ακτίνας

περιγράφεται από την εξίσωση $m\ddot{r} = F(r) + \frac{L^2}{mr^3}$ (2). (Τούτο αποδεικνύεται αν στην εξίσωση

$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r)$ θέσουμε $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$). Όταν υλικό σημείο κινείται σε κύκλο είναι $r = \text{σταθ.}$ οπότε $\ddot{r} = 0$ και

$F(r) + \frac{L^2}{mr^3} = 0$. Θεωρούμε το ολοκλήρωμα $-\left[\int F(r)dr + \int \frac{L^2}{mr^3}dr\right] = U(r) + \frac{L^2}{2mr^2} = U_1(r)$ όπου $U_1(r)$

είναι το ανηγμένο δυναμικό του πεδίου. Επομένως $F(r) + \frac{L^2}{mr^3} = -\frac{dU_1}{dr}$ (3). Όταν υλικό σημείο κινείται σε

κύκλο το αριστερό μέλος της (3) ισούται με μηδέν, οπότε $\frac{dU_1}{dr}\bigg|_{r=\alpha} = 0$. Τούτο σημαίνει ότι τα σημεία της

κυκλικής τροχιάς του υλικού σημείου αποτελούν σημεία ισορροπίας. Η κυκλική τροχιά είναι ευσταθής αν

$\frac{d^2U_1}{dr^2}\bigg|_{r=\alpha} > 0$ και ασταθής αν $\frac{d^2U_1}{dr^2}\bigg|_{r=\alpha} < 0$. Παραγωγίζοντας επομένως την (1) ως προς r προσδιορίζουμε

το κριτήριο της ευσταθούς ή ασταθούς τροχιάς. Είναι $F'(r) - \frac{3L^2}{mr^4} = -\frac{d^2U_1}{dr^2}$. Για $r = \alpha$, η σχέση αυτή

γράφεται $\left[F'(\alpha) + \frac{3F(\alpha)}{\alpha}\right] = -\frac{d^2U_1}{dr^2}$. Επομένως η κυκλική τροχιά είναι ευσταθής αν $F'(\alpha) + \frac{3F(\alpha)}{\alpha} < 0$.

Αλλά στην κυκλική κίνηση η $F(\alpha) < 0$, ως κεντρομόλος. Διαιρώντας με $F(\alpha) < 0$ προκύπτει τελικώς η συνθήκη ευσταθείας για την κυκλική τροχιά, $\frac{F'(\alpha)}{F(\alpha)} + \frac{3}{\alpha} > 0$.

Λύση. (α) Για την ευστάθεια της τροχιάς θα εξετάσουμε το πρόσημο της σχέσεως $\frac{F'(\alpha)}{F(\alpha)} + \frac{3}{\alpha}$ (1). Έχουμε

$$\text{ότι } F = -\frac{k}{r^2} e^{-r/\alpha} \text{ . Συνεπώς } F' = -\frac{2}{r} \frac{k}{r^2} e^{-r/\alpha} + \frac{k}{r^2} \frac{1}{\alpha} e^{-r/\alpha} = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{2}{r} \right) F(r) \text{ . Η (1) δίδει } \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} > 0 \text{ .}$$

Η ανίσωση ισχύει πάντοτε οπότε η τροχιά είναι ευσταθής.

(β) Έχουμε $F'(\alpha) = \frac{kn}{\alpha^{n+1}}$. Συνεπώς $\frac{F'(\alpha)}{F(\alpha)} + \frac{3}{\alpha} = \frac{3-n}{\alpha}$. Άρα ευσταθείς είναι οι κυκλικές τροχιές για

$$\frac{3-n}{\alpha} > 0 \text{ ή για } n < 3 \text{ και ασταθείς για } n > 3 \text{ .}$$

6. Δορυφόρος γράφει κύκλο γύρω από ελκτικό κέντρο Ο με περίοδο Τ. Αν για κάποιο λόγο χάσει ακαριαία την κινητική του ενέργεια, να αποδειχθεί ότι η διάρκεια της πτώσεως αυτού μέχρι το ελκτικό κέντρο ισούται με $t = \frac{T\sqrt{2}}{8}$.

Υπόδειξη: Η περίοδος της κυκλικής κινήσεως προσδιορίζεται από τα δεδομένα της κινήσεως. Εν συνεχεία, η ελεύθερη πτώση περιγράφεται από την εξίσωση $m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{km}{r^2}\mathbf{e}_r$, η οποία ολοκληρώνεται αν τεθεί $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\frac{d\mathbf{r}}{dr}$. Κατ' αυτόν τον τρόπο προκύπτει η έκφραση της ταχύτητας πτώσεως $\dot{r}$ συναρτήσει της διανυσθείσας αποστάσεως r . Η έκφραση αυτή ολοκληρώνεται με κατάλληλο μετασχηματισμό, οπότε προσδιορίζεται η ταχύτητα συναρτήσει της θέσεως. Ακολούθως γράφουμε την ταχύτητα $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ και ολοκληρώνουμε για να προσδιορίσουμε την διάρκεια της πτώσεως.

Λύση. Έστω v η ταχύτητα του δορυφόρου και R η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς του. Είναι $T = \frac{2\pi R}{v}$ και $\frac{mv^2}{R} = \frac{km}{R^2}$. Επομένως $T = \frac{2\pi R^{3/2}}{k^{1/2}}$. Ο δορυφόρος εκτελεί ελεύθερη πτώση υπό την επίδραση της ελκτικής δυνάμεως χωρίς αρχική ταχύτητα από την θέση P_0 .

Έστω $P(\mathbf{r})$ η θέση του κατά την στιγμή t , όπου το διάνυσμα θέσεως μετρείται από το Ο και είναι $\mathbf{r} = \mathbf{OP}$. Η εξίσωση της κινήσεως του πείπτοντος σώματος είναι $m\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{km}{r^2}\mathbf{e}_r \Rightarrow \ddot{r} = -\frac{k}{r^2}$. Αλλά

$$\ddot{r} = \dot{r}\frac{dr}{dr}. \text{ Κατά συνέπεια } \dot{r}dr = -\frac{kdr}{r^2}. \text{ Ολοκληρώνουμε και βρίσκουμε } \frac{\dot{r}^2}{2} = \frac{k}{r} + C \quad (1).$$

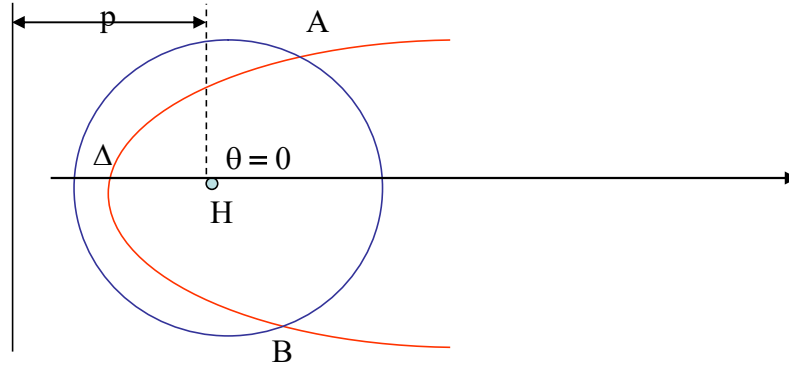
Η σταθερά της ολοκληρώσεως υπολογίζεται από τις αρχικές συνθήκες, οι οποίες είναι: $\dot{r} = 0$ όταν $\mathbf{r} = \mathbf{R}$.

Άρα $C = -\frac{k}{R}$. Κατόπιν τούτου η (1) γράφεται $\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2k}{R}} \frac{\sqrt{R-r}}{\sqrt{r}} \Rightarrow \sqrt{\frac{r}{R-r}} dr = \sqrt{\frac{2k}{R}} dt$ με $0 \leq r \leq R$.

Θέτουμε $r = R \cos^2 u$ και τα όρια του u , που αντιστοιχούν στα όρια του r είναι $\frac{\pi}{2}, 0$. Το ολοκλήρωμα

$$\text{γράφεται } -\int_{\pi/2}^0 2R \cos^2 u du = \sqrt{\frac{2k}{R}} \int_0^t dt \text{ και τελικά, } t = R \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{2k}}. \text{ Συνεπώς } t = \frac{T\sqrt{2}}{8}.$$

7. Κομήτης κινείται στο επίπεδο της κινήσεως της Γης περί τον ήλιο και γράφει παραβολική τροχιά. Η τροχιά της Γης θεωρείται κυκλική ακτίνας a . Να αποδειχθεί ότι τα σημεία A και B τομής των τροχιών του κομήτη και της Γης δίδονται από τη σχέση $\cos \theta = -1 + \frac{2p_1}{a}$, όπου p_1 είναι η απόσταση του περιηλίου του κομήτη από τον ήλιο, στο οποίο ευρίσκεται για $\theta=0$. Να αποδειχθεί επίσης ότι η διάρκεια της κινήσεως του κομήτη στο τόξο AB ισούται με $t_{AB} = T \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \left(\frac{2p_1}{a} + 1 \right) \left(1 - \frac{p_1}{a} \right)^{1/2}$, όπου T είναι η περίοδος της Γης περί τον ήλιο.



Υπόδειξη: Σχεδιάζουμε την κυκλική τροχιά της Γης και την παραβολική του κομήτη. Σχεδιάζουμε επίσης την γραμμή των ασίδων και την διευθετούσα της παραβολής. Να προσέξουμε ότι η εστία της παραβολής και το κέντρο της κυκλικής τροχιάς ταυτίζονται με τον Ήλιο, ο οποίος είναι το ελκτικό κέντρο για την Γη και τον κομήτη. Στην παραβολική τροχιά είναι $e=1$. Θέτουμε $e=1$ στην σχέση $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, όπου p είναι η απόσταση της εστίας από την διευθετούσα. Επίσης $p=2p_1$. Αντικαθιστώντας προκύπτει η αποδεικτέα σχέση. Για το δεύτερο ερώτημα θα θεωρήσουμε την εξίσωση της μηχανικής ενέργειας του κομήτη, στην οποία θα θέσουμε $E=0$ και $2p_1 = \frac{L^2}{mk}$.

Λύση. Η εξίσωση της παραβολικής τροχιάς του κομήτη είναι $r = \frac{2p_1}{1+\cos\theta}$. Όταν $r=a$, η εξίσωση δίδει

$\cos\theta = \frac{2p_1}{a} - 1$. Να υπενθυμίσουμε ότι στην εξίσωση $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$, η εκκεντρότητα $e=1$ για την παραβολή. Επίσης το p είναι η απόσταση της εστίας από την διευθετούσα. Από τον ορισμό της παραβολής ως τον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από ένα σταθερό σημείο (την εστία) και από δοθείσα ευθεία (την διευθετούσα) προκύπτει ότι $p=2p_1$. Έτσι προκύπτει η αποδεικτέα σχέση.

Τον χρόνο κινήσεως του κομήτη στο τόξο AAB θα υπολογίσουμε από την εξίσωση της ενέργειας. Είναι $T+U=E=0$ για την παραβολή. Άρα $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{k}{r} = 0$, όπου $k=GMm$ και M είναι η μάζα του ήλιου.

Επίσης $2p_1 = \frac{L^2}{mk}$. Αντικαθιστούμε στην εξίσωση της ενέργειας και μετά από μερικές πράξεις ρουτίνας

παίρνουμε $\frac{rdr}{\sqrt{r-p_1}} = \sqrt{2GM}dt$. Θέτουμε $\sqrt{r-p_1} = u$, οπότε το αριστερό μέλος γράφεται $\int (p+u^2)du$.

Τελικά ευρίσκουμε $2(r-p_1)^{1/2} \left(\frac{2r+p_1}{3} \right)_{r=p_1}^{r=\alpha} = (2GM)^{1/2} t_{A\Delta}$. Έτσι ευρίσκουμε

$t_{AB} = 2t_{A\Delta} = \frac{4(2\alpha+p_1)}{3\sqrt{GM}}(\alpha-p_1)^{1/2}$. Για την περίοδο της Γης έχουμε $T = \frac{2\pi\alpha^{3/2}}{\sqrt{GM}}$. Διαιρούμε τις δύο

σχέσεις κατά μέλη και προκύπτει $t_{AB} = T \frac{\sqrt{2}}{3\pi} \left(\frac{2p_1}{\alpha} + 1 \right) \left(1 - \frac{p_1}{\alpha} \right)^{1/2}$.

Άσκηση 8

Ένας τεχνητός δορυφόρος μάζας m_s γυρίζει γύρω από την Γη, μάζας M_Γ , σε ελλειπτική τροχιά. Κατά μήκος της τροχιάς του, η πλησιέστερη απόσταση στο κέντρο της Γης είναι ίση με r_0 ενώ η πιο απομακρυσμένη είναι ίση με $2r_0$. α) Βρείτε τον μεγάλο ημι-άξονα και την εκκεντρότητα της έλλειψης καθώς και τη στροφορμή της τροχιάς. β) Τη στιγμή που ο δορυφόρος βρίσκεται στη μέγιστη απόσταση από τη Γη, σε τι ποσοστό πρέπει να μεταβάλλουμε την ταχύτητά του ώστε να μπει σε κυκλική τροχιά; Πόσος είναι ο λόγος των περιόδων της αρχικής ελλειπτικής τροχιάς και της τελικής κυκλικής τροχιάς;

Λύση

α)

Μεγάλος ημιάξονας $a = (r_0 + 2r_0)/2 = 3r_0/2$

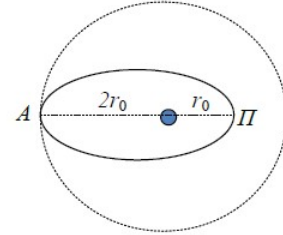
Εκκεντρότητα $r_0 = a(1-e) \Rightarrow e = 1 - r_0/a = 1/3$

Στροφορμή

Η ταχύτητα (πχ) στο περίγειο θα είναι $v^2 = \frac{k}{m_s} \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right)$, $k = GM_\Gamma m_s$

Αντικαθιστώντας το a , βρίσκουμε $v_\Pi = \sqrt{\frac{4GM_\Gamma}{3r_0}}$. Στο περίγειο $\mathbf{v} \perp \mathbf{r}$ και άρα

$$L = m_s r_\Pi v_\Pi = m_s r_0 \sqrt{\frac{4GM_\Gamma}{3r_0}} = \frac{2}{\sqrt{3}} m_s \sqrt{GM_\Gamma r_0}$$



β) Η ταχύτητα του δορυφόρου στο απόγειο της τροχιάς θα είναι

$$v_A^2 = \frac{GM_\Gamma m_s}{m_s} \left(\frac{2}{2r_0} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GM_\Gamma}{3r_0}. \text{ Για να εκτελέσει κυκλική τροχιά με ακτίνα } R=2r_0 \text{ απαιτείται ταχύτητα}$$

$$v_k^2 = \frac{GM_\Gamma m_s}{m_s} \left(\frac{2}{2r_0} - \frac{1}{2r_0} \right) = \frac{GM_\Gamma}{2r_0}. \text{ Άρα } v_k/v_A = \sqrt{3/2} \text{ ή } \frac{\Delta v}{v_A} = \frac{v_k - v_A}{v_A} = \sqrt{3/2} - 1 \approx 0.22. \text{ Δηλαδή, για να}$$

μπει σε κυκλική τροχιά ο δορυφόρος θα πρέπει να αυξηθεί η ταχύτητά του κατά 22%.

Σύμφωνα με το νόμο του Kepler

$$\left(\frac{T_k}{T_{el}} \right)^2 = \left(\frac{a_k}{a_{el}} \right)^3 = \left(\frac{2r_0}{3r_0/2} \right)^3 = \left(\frac{4}{3} \right)^3. \text{ Άρα } T_k/T_{el} = (4/3)^{3/2} \approx 1.54.$$

Άσκηση 9

α) Σώμα μάζας m κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων $\mathbf{F}=F(r)\mathbf{e}_r$. Αποδείξτε ότι το μέτρο της ταχύτητας δίνεται από τη σχέση $v = \sqrt{-\frac{r_0 F(r_0)}{m}}$.

β) Τεχνητός δορυφόρος κινείται γύρω από τη Γη σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_0 . Πόσο (%) πρέπει να αυξηθεί στιγμιαία η ταχύτητα του δορυφόρου ώστε να φτάνει σε μέγιστη απόσταση $2r_0$ από τη Γη; (Η Γη να θεωρηθεί ως υλικό σημείο)

Λύση

α) Έχει παρουσιαστεί στην αντίστοιχη θεωρία του μαθήματος:

Δηλαδή από την εξίσωση (3.6.1) (του βιβλίου «Θεωρητική Μηχανική» των Γ. Καραχάλιου και Β.

Λουκόπουλου), $F(\alpha) + \frac{L^2}{m\alpha^3} = 0$, μπορούμε να βρούμε τα σημεία ισορροπίας του υλικού σημείου επί της ακτίνας ΟΣ. Λύνοντας την (3.6.1) ως προς α βρίσκουμε ότι $\alpha^3 = -(L^2/mF(\alpha))$. Για να είναι η ποσότητα αυτή πραγματική και θετική θα πρέπει $F(r) < 0$. **Επομένως, αναγκαία συνθήκη για την ύπαρξη κυκλικών τροχιών είναι το πεδίο δυνάμεων να είναι ελκτικό.**

Λαμβάνουμε υπόψη ότι: $\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \omega$ και επίσης για την κυκλική τροχιά είναι $u = r\omega$. Επιπλέον θέτοντας $r = \alpha$, από την (3.6.1) προκύπτει ότι $u^2 = -(\alpha F(\alpha)/m)$.

Ο τύπος αυτός δίνει την ταχύτητα με την οποία πρέπει να εκτοξευθεί το υλικό σημείο από απόσταση α από το σημείο Ε (ή Ο) και κάθετα προς την ακτίνα, ώστε η τροχιά του να είναι κυκλική.

β) Η ταχύτητα της κυκλικής τροχιάς είναι $v_0^2 = \frac{GM}{r_0}$.

Αφού αυξηθεί η ταχύτητα σε v_1 , το σώμα θα κάνει ελλειπτική τροχιά. Για $r=r_0$ (όπου γίνεται η στιγμιαία αύξηση) θα έχουμε το περίκεντρο της έλλειψης ενώ το $r=2r_0$ θα είναι το απόκεντρο (μέγιστη απομάκρυνση).

Άρα η νέα έλλειψη έχει μεγάλο ημιάξονα $a = \frac{3}{2}r_0$ και στην θέση $r=r_0$ η ταχύτητα θα είναι

$$v_1^2 = \frac{k}{m} \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{a} \right) = \frac{GMm}{m} \left(\frac{2}{r_0} - \frac{1}{(3/2)r_0} \right) = \frac{4GM}{3r_0}$$

$$\text{Συνεπώς } \frac{v_1}{v_0} = \frac{2}{\sqrt{3}} \Rightarrow \frac{v_1 - v_0}{v_0} = \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 15.6\%$$