

Μη ολόνομοι δεσμοί

Παράδειγμα 1

Ένα παράδειγμα μονομερούς δεσμού είναι η κίνηση υλικού σημείου σε πεδίο βαρύτητας το οποίο αφήνεται να ολισθήσει πάνω στην εξωτερική επιφάνεια σφαίρας ακτίνας R . Στη περίπτωση αυτή ο δεσμός γράφεται ως

$$x^2 + x^2 + x^2 - R \geq 0.$$

Παράδειγμα 2

Ένα δεύτερο παράδειγμα μη ολόνομου συστήματος (ανολόνομου συστήματος) είναι η περίπτωση συστήματος δύο υλικών σημείων A και B που συνδέονται με ράβδο μήκους l . Το σύστημα περιορίζεται να κινείται σε δοσμένο επίπεδο κατά τέτοιο τρόπο, ώστε η ταχύτητα \mathbf{v}_C του μέσου της ράβδου να είναι συγγραμμική με τη ράβδο.

Θεωρώντας ως επίπεδο της κινήσεως το Oxy , το σύστημα περιγράφεται από τις καρτεσιανές συντεταγμένες των υλικών σημείων (x_1, y_1, x_2, y_2) και υπόκεινται σε δύο δεσμούς.

Στον ολόνομο δεσμό

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 - l^2 = 0 \quad (1)$$

και στον δεσμό που προκύπτει από την συνθήκη $\mathbf{v}_C \cdot \overline{AB} = 0$ και γράφεται ως

$$(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(y_2 - y_1) - (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)(x_2 - x_1) = 0. \quad (2)$$

Η σχέση (2) προκύπτει ως εξής:

Ορίζουμε ως κέντρο μάζας συστήματος υλικών σημείων:

$$\mathbf{r}_C = \frac{\sum_1^N m_i \mathbf{r}_i}{m}$$

όπου $m = \sum_1^N m_i$.

Για δύο υλικά σημεία τα διανύσματα θέσεως είναι

$$\mathbf{r}_1 = x_1 \mathbf{i} + y_1 \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r}_2 = x_2 \mathbf{i} + y_2 \mathbf{j}$$

Οι συνιστώσες του κ.μ. είναι

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m}$$

$$y_C = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2}{m}$$

Επειδή στο παράδειγμά μας είναι $m_1 = m_2 = m/2$, θα είναι

$$x_C = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_C = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

Οι συνιστώσες της ταχύτητας του κ.μ. θα είναι

$$v_{Cx} = \dot{x}_C = \frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}$$

$$v_{Cy} = \dot{y}_C = \frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2}$$

Το μήκος AB είναι

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j}$$

Η ταχύτητα του κ.μ. είναι

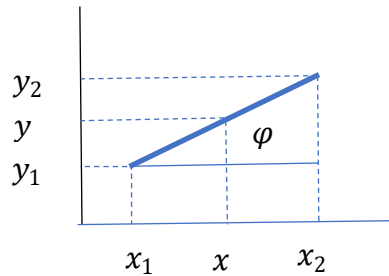
$$\mathbf{v}_C = v_{Cx}\mathbf{i} + v_{Cy}\mathbf{j} = \dot{x}_C\mathbf{i} + \dot{y}_C\mathbf{j} = \left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2}\right)\mathbf{j}$$

Επομένως το εξωτερικό γινόμενο είναι

$$v_C \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_{Cx} & v_{Cy} & 0 \\ AB_x & AB_y & 0 \end{vmatrix} = \left[\left(\frac{\dot{x}_1 + \dot{x}_2}{2}\right)(y_2 - y_1) + \left(\frac{\dot{y}_1 + \dot{y}_2}{2}\right)(x_2 - x_1) \right] \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

και ο δεσμός λαμβάνει την μορφή

$$(\dot{x}_1 + \dot{x}_2)(y_2 - y_1) - (\dot{y}_1 + \dot{y}_2)(x_2 - x_1) = 0$$



Χρησιμοποιώντας το σύστημα των γενικευμένων συντεταγμένων (x, y, φ) , όπου (x, y) οι συντεταγμένες του μέσου της ράβδου και φ η γωνία της ράβδου με τον άξονα Ox , ο ολόνομος δεσμός ενσωματώνεται και ο ανολόνομος γράφεται ως

$$\dot{x} \sin\varphi - \dot{y} \cos\varphi = 0 \quad (3)$$

ή

$$\sin\varphi dx - \cos\varphi dy = 0. \quad (4)$$

Η σχέση (4) εκφράζει ανολόνομο δεσμό διότι δεν είναι δυνατόν να ολοκληρωθεί.

ΠΡΟΣΟΧΗ: Γενικά ισχύει ότι για να είναι ολοκληρώσιμη η διαφορική εξίσωση

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz = 0$$

αναγκαία και ικανή συνθήκη είναι η

$$A_x \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right) + A_y \left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) + A_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \right) = 0.$$

Η σχέση (3) προκύπτει ως κατωτέρω:

$$x_1 = x - \frac{l}{2} \cos\varphi \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{x} + \frac{l}{2} \sin\varphi \dot{\varphi}$$

$$y_1 = y - \frac{l}{2} \sin\varphi \Rightarrow \dot{y}_1 = \dot{y} - \frac{l}{2} \cos\varphi \dot{\varphi}$$

$$x_2 = x + \frac{l}{2} \cos \varphi \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{x} - \frac{l}{2} \sin \varphi \dot{\varphi}$$

$$y_2 = y + \frac{l}{2} \sin \varphi \Rightarrow \dot{y}_2 = \dot{y} + \frac{l}{2} \cos \varphi \dot{\varphi}$$

Έτσι η εξίσωση του δεσμού γράφεται ως

$$\begin{aligned} & \left(\dot{x} + \frac{l}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} + \dot{x} - \frac{l}{2} \sin \varphi \dot{\varphi} \right) \left(y + \frac{l}{2} \sin \varphi - y + \frac{l}{2} \sin \varphi \right) \\ & - \left(\dot{y} - \frac{l}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} + \dot{y} + \frac{l}{2} \cos \varphi \dot{\varphi} \right) \left(x + \frac{l}{2} \cos \varphi - x + \frac{l}{2} \cos \varphi \right) = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$(2\dot{x} l \sin \varphi) - (2\dot{y} l \cos \varphi) = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{x} \sin \varphi - \dot{y} \cos \varphi = 0}$$
